МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования

«ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ПГУ)

И. В. Бойков, Н. П. Кривулин

АНАЛИТИЧЕСКИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ИДЕНТИФИКАЦИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Монография

Пенза
Издательство ПГУ
2016

УДК 62–52
Б77

Р е ц е н з е н т ы :
доктор технических наук, профессор кафедры сенсорики
Санкт-Петербургского национального исследовательского
университета информационных технологий, механики и оптики
В. С. Сизиков

кандидат физико-математических наук, доцент,
заведующий кафедрой прикладной математики
Мордовского государственного университета им. Н. П. Огарева
П. А. Шаманаев

Бойков, И. В.

Б77 Аналитические и численные методы идентификации динамических систем : моногр. / И. В. Бойков, Н. П. Кривулин. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2016. – 398 с.

ISBN 978-5-906855-55-8

Работа посвящена аналитическим и численным методам параметрической идентификации одномерных и многомерных непрерывных и дискретных систем. Рассматриваются системы с сосредоточенными и распределенными параметрами, математические модели которых описываются системами интегральных уравнений Вольтерра, системами разностных уравнений, системами обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных. Особое внимание уделяется идентификации параметров эредитарных моделей динамических систем, которые описываются системами обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных, операторы которых содержат производные дробных порядков. Отдельная глава посвящена приближенным методам восстановления входных сигналов в системах с сосредоточенными и распределенными параметрами. Монография является обобщением работ авторов по методам идентификации параметров динамических систем.

Книга предназначена специалистам по информационно-измерительной технике. Она также может быть полезна студентам и аспирантам специальности «Прикладная математика и информатика». Отдельные главы книги могут быть использованы в качестве пособия по дисциплинам «Теория управления», «Граничные интегральные уравнения», «Уравнения математической физики», «Теория сигналов и систем», «Измерительные преобразователи».

УДК 62–52

ISBN 978-5-906855-55-8

©Пензенский государственный университет, 2016

Содержание

Предисловие **8**

1. Общие сведения. Обзоры **13**
1.1. Краткий обзор методов идентификации 13
1.2. Элементы функционального анализа 16
1.2.1. Нормированные пространства 16
1.3. Линейные операторы и линейные уравнения 18
1.3.1. Линейные операторы 18
1.3.2. Линейные уравнения 19
1.4. Элементы теории функций 21
1.4.1. Классы функций 21
1.4.2. Пространства функций 23
1.5. Интегральные преобразования 23
1.5.1. Интегральное преобразование Фурье 23
1.5.2. Дискретное преобразование Фурье 27
1.5.3. Преобразование Лапласа 28
1.5.4. Z-преобразование 32
1.5.5. Преобразование Меллина 33
1.6. Преобразование Лорана 35
1.7. Сингулярные интегралы 38
1.8. Краевая задача Римана 40
1.9. Утверждения из теории аппроксимации 45
1.9.1. Полиномы наилучшего приближения 45
1.9.2. Интерполяционные полиномы 46
1.9.3. Факты из теории квадратурных формул 48
1.10. Устойчивые методы вычисления производных 49
1.10.1. Приближенные методы вычисления производных первого порядка 49
1.10.2. Приближенное вычисление производных высоких порядков 52

2. Методы восстановления импульсной переходной функции линейных систем 56
2.1. Обзор методов 56
2.2. Определение временных характеристик линейных систем по двум тестовым сигналам 58
2.2.1. Непрерывные системы 58
2.2.2. Определение разностных ядер интегральных уравнений 63
2.2.3. Дискретные системы 66
2.2.4. Многомерные системы 68
2.3. Приближенные методы определения временных характеристик по одному тестовому сигналу 69
2.4. Определение импульсной переходной функции при ненулевых начальных условиях 73
2.4.1. Непрерывные системы 74
2.4.2. Дискретные системы 76
2.5. Метод преобразований при идентификации систем . . 77
2.5.1. Непрерывные системы 80
2.5.1.1. Преобразование Лапласа 81
2.5.1.2. Преобразование Фурье 90
2.5.1.3. Преобразование Меллина 92
2.5.1.4. Преобразование Хартли 96
2.5.1.5. Многомерные системы 97
2.5.2. Дискретные системы 101
2.5.2.1. Одномерные системы 102
2.5.2.2. Многомерные системы 106
2.6. Приближенные методы идентификации линейных динамических систем 109
2.6.1. Идентификация систем по реакции на ступенчатые входные сигналы 109
2.6.2. Использование квадратурных формул при идентификации систем 114
2.6.3. Метод восстановления непрерывной функции . 114
2.6.4. Метод восстановления функции $g(t,\tau)$, принадлежащей классу $W^{r,r}(M), r \geq 3$ 118
2.6.5. Идентификация линейных динамических систем по нескольким тестовым сигналам 124
2.6.6. Определение значений импульсной переходной функции на отрезках прямых $t = t_k$ 129

3. Идентификация нелинейных динамических систем 136
3.1. Идентификация нелинейных систем с помощью специально подобранных сигналов 136
3.2. Идентификации нелинейных систем с помощью гармонических сигналов 144
3.2.1. Линейные системы 145
3.2.2. Идентификация нелинейных систем 149
3.2.2.1. Нелинейность второго порядка 149
3.2.2.2. Нелинейность третьего порядка . . . 151
3.2.2.3. Точность метода 154
3.3. Идентификация измерительных преобразователей в процессе эксплуатации 155
3.4. Идентификации нелинейных многомерных систем . . 160
3.5. Приближенные методы идентификации нелинейных измерительных преобразователей 171
3.5.1. Идентификация параметров нелинейных измерительных преобразователей по реакции на δ-образный входной сигнал 172
3.5.2. Идентификация параметров измерительных преобразователей по реакции на последовательность δ-образных функций . 172
3.5.3. Восстановление функции $g(t)$ на сегменте $[0, T]$ 175
3.5.4. Восстановление коэффициентов a_k аппаратной функции $\sum_{k=1}^{N} a_k g(t)$ 178
3.5.5. Применение δ-функции для идентификации нелинейных систем с распределенными параметрами 181
3.5.6. Идентификация нелинейных систем с распределенными параметрами по нескольким тестовым сигналам 183

4. Параметрическая идентификация динамических систем 195
4.1. Параметрическая идентификация непрерывных динамических систем 196
4.1.1. Определение коэффициентов обыкновенных дифференциальных уравнений, моделирующих динамические системы 196

4.1.2. Системы дифференциальных уравнениий с запаздыванием 216
4.1.3. Восстановление параметров линейных систем, описываемых дифференциальными уравнениями с переменными коэффициентами 219
4.2. Параметрическая идентификация одномерных дискретных динамических систем 232
4.2.1. Определение коэффициентов разностных уравнений с постоянными коэффициентами . . 233
4.2.2. Определение переменных коэффициентов разностных уравнений 234
4.2.3. Идентификация параметров динамических систем при конечных входных и выходных выборках 246
4.3. Параметрическая идентификация непрерывных линейных динамических систем с распределенными параметрами 249
4.4. Определение параметров физических процессов . . . 259
4.4.1. Определение импульсной переходной функции 260
4.4.2. Определение параметров системы 263
4.5. Идентификация дискретных динамических систем с распределенными параметрами 265
4.6. Параметрическая идентификация эредитарных систем 278
4.6.1. Динамические системы, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями с дробными производными 279
4.6.2. Параметрическая идентификация эредитарных систем с распределенными параметрами 291

5. Восстановление входных сигналов динамических систем 300
5.1. Обзор методов 300
5.2. Итерационные методы восстановления сигналов, искаженных линейными непрерывными системами . . 301
5.2.1. Итерационные методы решения одномерных уравнений 303
5.2.2. Итерационные методы решения многомерных уравнений 307
5.2.3. Регуляризация локальным сдвигом 308

5.3. Итерационные методы восстановления сигналов, искаженных дискретными линейными системами . . 309
5.4. Методы регуляризации при восстановлении входных сигналов 312
5.5. Об одновременном определении входного сигнала и импульсной переходной функции 319
5.5.1. Одномерные дискретные системы 320
5.5.2. Многомерные дискретные системы 326
5.5.3. Одномерные непрерывные системы 330
5.5.4. Многомерные непрерывные системы 332
5.6. Восстановление входных сигналов объектов с переменной структурой 333
5.7. Восстановление финитных входных сигналов в нелинейных системах 338
5.7.1. Линейные системы 340
5.7.2. Нелинейные системы 347
5.8. Восстановление входных сигналов динамических систем с распределенными параметрами 351
5.8.1. Восстановление входных сигналов линейных систем 351
5.8.2. Восстановление входных сигналов нелинейных систем 356
5.9. Итерационные методы восстановления пространственных изображений, искаженных системами с аберрациями 360

Заключение **373**

Список литературы **374**

Предисловие

Уравнения, моделирующие физические процессы, обычно выводятся из основных законов сохранения и материальных уравнений. При этом возникает необходимость в определении параметров этих моделей. Этой фундаментальной проблеме – проблеме идентификации – посвящено много работ в различных областях классической и современной науки.

Актуальность исследований в этом направлении обусловлена необходимостью решения многих задач физики и техники: восстановление оптических и радиолокационных изображений; определение передаточных характеристик измерительных приборов; проектирование объектов, где центральную проблему составляет определение вибраций или динамики поведения; проектирование в основных отраслях промышленности, где тепло- и массоперенос и химические реакции лежат в основе технологических процессов; геофизические исследования, включая разведку подземных вод и месторождений нефти; изучение землетрясений; метеорологические исследования; оценка параметров в математических моделях экономики, экологии, биологии, иммунологии; оценка продуктивности сельскохозяйственного производства; демографический анализ.

Параметрическая идентификация заключается в определении неизвестных параметров в математических моделях динамических систем.

Идентификация в настоящее время – обязательный элемент и наиболее сложная стадия процесса решения актуальных прикладных задач. В процессе идентификации создаются адекватные модели, необходимые для практического использования математических методов и сложных наукоемких технологий. Ввиду этого разработка методов и алгоритмов идентификации приобретает в настоящее время исключительно важное значение для фундаментальной науки [62].

Методам идентификации статических и динамических объектов посвящено большое число книг [2, 14, 44, 51, 69, 70, 111, 117,

121, 125, 130, 141, 142, 148, 150, 160, 161, 198, 207, 209, 225] и статей [36,37,64,67,75,77,84–87,134,140,143,152,154,186,188,190–195,197,201, 204–206,208,210,213–217], в которых рассматривались различные аспекты идентификации, автоматического и оптимального управления с применением различного математического аппарата.

В постановке задачи идентификации выделяется два подхода: детерминистский и стохастический. В работе [11] эти подходы определяются следующим образом: «Возможность однозначного определения параметров модели при отсутствии шума наблюдений представляет собой детерминистскую постановку проблемы, тогда как при стохастической постановке наблюдения предполагаются искаженными случайным шумом».

Отметим, что указанная детерминистская постановка проблемы нуждается в усилении: необходимо не только однозначное, но и устойчивое определение параметров в различных метрических пространствах.

Представляет интерес построение областей устойчивости в различных пространствах. Это позволит определить области значений параметров при наличии шумов различной природы.

Остановимся на содержании книги.

Книга состоит из предисловия и пяти глав.

В первой главе дан краткий обзор методов идентификации систем; приведен ряд утверждений из функционального анализа, теории функций, теории интегральных преобразований, теории аппроксимации, используемых в книге. Даны необходимые сведения из теории краевой задачи Римана и сингулярных интегральных уравнений.

Вторая глава посвящена методам идентификации линейных динамических систем, описываемых интегральными уравнениями.

В разделе 2.1 приведен обзор методов идентификации.

Раздел 2.2 посвящен точному определению импульсной переходной функции по двум тестовым сигналам.

В разделе 2.3 изложены приближенные методы определения импульсной переходной функции по одному δ-образному сигналу.

В разделе 2.4 исследованы методы применения краевой задачи Римана к идентификации динамических систем.

В разделе 2.5 исследованы методы идентификации динамических систем с помощью интегральных преобразований и Z-преобразования. Методы основаны на применении обобщенной теоремы Бореля и ее дискретного аналога. В качестве интегральных преоб-

разований рассматриваются преобразования Лапласа, Фурье, Мелина, Хартли. Рассмотрены непрерывные и дискретные системы, одномерные и многомерные системы.

В разделе 2.6 исследуются приближенные методы идентификации динамических систем с распределенными параметрами, представимых в виде интегральных уравнений Фредгольма и Вольтерра. Предложены приближенные формулы и оценены их точности.

Третья глава посвящена методам идентификации нелинейных динамических систем, описываемых интегральными уравнениями.

Раздел 3.1 посвящен идентификации параметров нелинейных измерительных преобразователей с помошью специально подобранных сигналов.

Раздел 3.2 посвящен идентификации параметров нелинейных измерительных преобразователей с помошью гармонических сигналов.

В разделе 3.3 рассмотрены методы идентификации систем в процессе эксплуатации.

Раздел 3.4 посвящен аналитическим и приближенным методам идентификации нелинейных многомерных систем. Аппаратом, используемым при их исследовании, являются интегральные преобразования и подробно изложенный в книге новый класс итерационных методов.

В разделе 3.5 предложены вычислительные схемы определения импульсных переходных функций нелинейных измерительных преобразователей, описываемых уравнениями вида

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \left(\int_0^t g(t-\tau)x(\tau)d\tau \right)^k = f(t),\ 0 \le t \le T,$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \left(\int_0^t g(t,\tau)x(\tau)d\tau \right)^k = f(t),\ 0 \le t \le T,$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \int_0^t g(t,\tau)x^k(\tau)d\tau = f(t),\ 0 \le t \le T.$$

Глава 4 посвящена параметрической идентификации динамических систем, описываемых дифференциальными и разностными уравнениями.

Раздел 4.1 посвящен определению коэффициентов обыкновенных дифференциальных уравнений и их систем.

Рассматриваются дифференциальные уравнения с постоянными и переменными коэффициентами, дифференциальные уравнения с запаздыванием. Для идентификации их параметров предложены аналитические и численные методы, основанные на различных подходах. Дано обоснование методов. Приведены модельные примеры.

В разделе 4.2 предложены методы определения коэффициентов разностных уравнений.

В разделе 4.3 изложены методы параметрической идентификации динамических систем с распределенными параметрами.

В разделе 4.4 предложены методы определения параметров физических процессов.

Раздел 4.5 посвящен методам параметрической идентификации многомерных дискретных динамических систем с распределенными параметрами.

В разделе 4.6 излагаются вариационные методы параметрической идентификации эредитарных систем.

В параграфе 4.6.1 предложен метод определения параметров систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями с дробными производными, а в параграфе 4.6.2 рассмотрен метод для определения параметров уравнений в частных производных с производными дробного порядка.

Пятая глава посвящена методам восстановления входных сигналов.

В разделе 5.1 представлен обзор известных методов.

Раздел 5.2 посвящен изложению итерационных методов решения одномерных и многомерных интегральных уравнений в свертках в рефлексивных пространствах. В этом разделе изложены достаточно общие итерационные методы, применимые к уравнениям в свертках с широким набором ядер.

В разделе 5.3 аналогичные результаты получены для систем, моделируемых дискретными линейными уравнениями.

В разделе 5.4 предложены методы регуляризации для нахождения входных сигналов динамических систем, описываемых различными видами интегральных уравнений первого рода.

Раздел 5.5 посвящен проблеме одновременного восстановления аппаратной функции и входного сигнала в дискретных и непрерывных системах. Метод основан на применении краевой задачи Римана

и сингулярных интегральных уравнений. Рассмотрены одномерные и многомерные системы.

В разделе 5.6 рассмотрено восстановление входных сигналов в системах с переменной структурой.

Отдельный раздел (5.7) посвящен восстановлению финитных входных сигналов. В качестве аппарата приближения здесь используются полиномы Бернштейна.

В разделе 5.8 предложены численные методы восстановления входных сигналов в системах с распределенными параметрами. Системы представлены одномерными и многомерными интегральными уравнениями.

Для восстановления пространственных изображений, искаженных аберрациями, в разделе 5.9 предлагаются итерационные методы. Их обоснование проводится в двумерной спектральной области, полученной в результате последовательного применения преобразований Фурье и Меллина к исходному двумерному интегральному уравнению первого рода.

Из приведенного обзора следует, что книга охватывает практически все аспекты параметрической идентификации систем с сосредоточенными и распределенными параметрами, моделируемых интегральными и дифференциальными уравнениями (обыкновенными и в частных производных).

Книга в основном написана по работам авторов, причем многие результаты публикуются впервые.

Книга в первую очередь адресована специалистам в области прикладной математики, автоматики и информационно-измерительной техники. Отдельные главы книги могут быть использованы в качестве пособия по дисциплинам "Теория управления", "Граничные интегральные уравнения", "Дифференциальные уравнения", "Уравнения математической физики", "Теория сигналов и систем", "Измерительные преобразователи".

Глава 1

Общие сведения. Обзоры

1.1. Краткий обзор методов идентификации

В качестве математических моделей как при стохастической, так и при детерминистской идентификации в основном используются дифференциальные уравнения (обыкновенные и в частных производных), разностные уравнения и интегральные уравнения в свертках. Там где для описания процессов используются системы обыкновенных дифференциальных уравнений или интегральные уравнения в свертках, в неявном виде предполагается, что процесс можно аппроксимировать моделью с сосредоточенными параметрами. Ответ на вопрос "Хорошо ли представляет модель с сосредоточенными параметрами реальный процесс" далеко непрост.

Идентификации параметров в стохастическом случае посвящены работы [187, 199, 212, 221, 223, 224].

Идентификации параметров в детерминистском случае посвящены работы [56, 189, 196, 200, 204, 220, 226–228].

В случае детерминистского подхода в литературе до последнего времени основное внимание уделялось методам идентификации линейных систем с сосредоточенными параметрами, функционирование которых описывается уравнениями в свертках

$$\int_0^t g(t-\tau)x(\tau)d\tau = f(t).$$

Аналитические методы исследования разрешимости уравнений в свертках и численные алгоритмы их решения подробно исследованы в [58, 65, 136, 170]. Специфика применения этих алгоритмов к задачам идентификации описана в [1, 71].

Применение δ-образных функций к определению ИПФ основано на том известном факте, что ИПФ является выходной функцией устройства при подаче на его вход δ-функции. Так как физически реализовать δ-функцию невозможно, то вместо δ-функции используют δ-образные функции.

В монографии [1, с. 269–271] предложен метод восстановления ИПФ по реакции устройства на входной сигнал в виде δ-образной функции или даже произвольной функции, разложение которой в ряд Фурье содержит все гармоники. Теоретически по этому методу ИПФ возможно представление в виде бесконечного ряда.

Хорошо изученной является проблема идентификации параметров непрерывных и дискретных моделей в стохастической постановке, когда предполагается, что наблюдения искажены случайным шумом. Значительно менее исследованной является проблема идентификации в детерминистской постановке. Причем в большинстве работ предполагается возможность наблюдения выходного сигнала на некотором конечном отрезке времени. Практически неисследованной является проблема идентификации по результатам дискретных измерений. В книге [11] рассматривается задача идентификации параметров систем дифференциальных уравнений по дискретным наблюдениям.

В книге [11] из общей проблемы идентификации выделяется локальная идентификация: "Задача параметрической идентифицируемости не во всем пространстве параметров, а в окрестности некоторого значения параметра" носит название локальной идентифицируемости.

В основу свойства локальной идентифицируемости положен принцип неразличимости, который заключается в следующем [11]: "Пара значений параметров p_1, p_2 называется неразличимой, если $y(t, p_1) \equiv y(t, p_2)$, $t \in [t_0, T]$, где $y[t, p]$ – измеряемый на отрезке времени $[t_0, T]$ выход рассматриваемой системы. В противном случае пара p_1, p_2 называется различимой". Подробному исследованию проблемы локальной идентификации посвящена монография [191].

В последние десятилетия активно разрабатываются методы идентификации систем с распределенными параметрами, которые разработаны значительно меньше, чем методы идентификации систем с сосредоточенными параметрами. Системы с распределенными параметрами моделируются дифференциальными уравнениями в частных производных, интегральными и интегродифференциальными уравнениями общего вида.

При детальном изучении процессов химической технологии, холодной и горячей обработки металлов, добычи полезных ископаемых, нефти и газов, процессов тепловой и ядерной энергетики, производства полупроводниковых, интегральных схем, тонких пленок, процессов радиофизики, акустики, динамики полета и во многих других областях техники мы сталкиваемся с необходимостью построения и использования все более точных математических моделей. Следует заметить, что эти процессы протекают не только во времени, но и в пространстве. Поэтому их естественным математическим описанием являются уравнения в частных производных. Они возникают в результате применения законов сохранения массы, энергии и количества движения к сплошной среде. Приведем несколько примеров таких уравнений [54].

Уравнение распространения звука в однородной среде и электромагнитных колебаниях в однородной среде имеет вид:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x_3^2} \right) + f,$$

где $y = y(x_1, x_2, x_3, t)$ – выходная координата (выходной сигнал), которая может быть плотностью газа, его давлением или потенциалом скоростей, а также напряженностью электрического и магнитного поля или соответствующими потенциалами; f – относительная плотность внешних сил; (x_1, x_2, x_3) – пространственные координаты; t – время; a^2 – характеристика среды, подлежащая определению.

Аналогичный вид имеют уравнения распространения тепла или диффузии частиц в однородной среде.

Движение идеальной жидкости (газа), в которой отсутствуют силы вязкости, определяется следующей нелинейной системой уравнений гидродинамики:

$$\begin{gathered} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho V) = f, \\ \Phi(P, \rho) = 0, \\ \frac{\partial V}{\partial t} + V \operatorname{grad} V + \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} P = F, \end{gathered}$$

где $P = P(x, t)$ – давление; $V = V(x, t)$ – вектор скорости движения жидкости, P, V могут быть выходными координатами (выходной сигнал); $\rho = \rho(x, t)$ – плотность жидкости; $f = f(x, t)$ – интенсивность источников потоков; $F = F(x, t)$ – вектор воздействия внешних сил, F, f – могут быть входными координатами (управляющи-

ми воздействиями – входными сигналами); $x = (x_1, x_2, x_3)$ – вектор пространственных координат.

В качестве другого примера можно указать на задачи восстановления формы тяготеющего тела, его плотности и глубины залегания в гравиразведке. Эти задачи описываются многомерными нелинейными уравнениями в свертках, интегральными уравнениями с многомерными интегралами типа Коши. Аналогичные задачи возникают в магниторазведке.

В качестве третьего примера можно указать на многочисленные обратные задачи рассеяния как в макроскопических, так и в квантовых системах.

Можно и дальше приводить перечень задач [229], в которых возникает необходимость в разработке методов идентификации параметров динамических систем с распределенными параметрами, однако даже этого короткого перечня достаточно, чтобы убедиться в ее актуальности. В предлагаемой читателю книге изложен ряд общих методов восстановления коэффициентов систем с распределенными параметрами.

В последнее время активно исследуются эредитарные системы, описываемые интегральными уравнениями, обыкновенными дифференциальными уравнениями и уравнениями в частных производных. Интерес к этой проблематике возник в связи с ее многочисленными приложениями в нанотехнологиях, биологии, экологии. Несмотря на важность проблемы, параметрическая идентификация эредитарных систем недостаточна исследована. В данной книге предложены методы параметрической идентификации таких систем.

1.2. Элементы функционального анализа

В этом разделе излагается в соответствии с монографией [118] ряд утверждений функционального анализа.

1.2.1. Нормированные пространства

Рассмотрим некоторое множество E, в котором введены две операции: сложение элементов и умножение на число, удовлетворяющие следующим условиям:

1) $x + y = y + x$ (коммутативность сложения);

2) $(x + y) + z = x + (y + z)$ (ассоциативность сложения);

3) $\lambda(x+y)=\lambda y+\lambda x$ (дистрибутивность относительно умножения);

4) $(\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x$ (дистрибутивность относительно сложения);

5) $\lambda(\mu x)=(\lambda\mu)x$ (ассоциативность умножения);

6) в E существует нулевой элемент Θ такой, что $0x=\Theta$ для $\forall x\in E$;

7) $1\cdot x=x$ для $x\in E$.

Множество E, удовлетворяющее перечисленным условиям, называется линейным пространством (вещественным, если числа λ,μ вещественные, или комплексным, если λ,μ комплексные).

Предположим, что каждому $x\in E$ поставлено в соответствие неотрицательное число $\|x\|$ (норма x), удовлетворяющее условиям:

а) $\|x\|=0$ тогда и только тогда, когда $x=\Theta$;

б) $\|\lambda x\|=|\lambda|\|x\|$ (однородность нормы);

в) $\|x+y\|\le\|x\|+\|y\|$ (неравенство треугольника).

Линейное пространство, в котором введено понятие нормы, называется линейным нормированным пространством.

Линейное нормированное пространство E называется полным, или банаховым, пространством, если из $\|x_n-x_m\|\to0$ при $n,m\to\infty$ следует сходимость последовательности $\{x_k\}$ к некоторому элементу $x\in E$ по норме пространства E, т.е. $\lim\limits_{k\to\infty}\|x-x_k\|_E=0$.

Банаховы пространства будем обозначать буквой B. Полное линейное нормированное пространство называется гильбертовым пространством (H-пространством), если в нем введено скалярное произведение (x,y), обладающее свойствами:

а) $(x,y)=\overline{(y,x)}$ (в частности, $(x,x)-$ вещественное число);

б) $(x_1+x_2,y)=(x_1,y)+(x_2,y)$;

в) $(\lambda x,y)=\lambda(x,y)$ для любого комплексного числа λ;

г) $(x,x)\ge0$, причем $(x,x)=0$ тогда и только тогда, когда $x=\Theta$.

При этом скалярное произведение связано с нормой равенством $(x,x)=\|x\|^2$.

1.3. Линейные операторы и линейные уравнения

1.3.1. Линейные операторы

Пусть B_1 и B_2 – банаховы пространства. Отображение A из B_1 в B_2 называется линейным оператором, если для любых чисел α, β и любых элементов $x, y \in B_1$, справедливо $A(\alpha x+\beta y) = \alpha Ax+\beta Ay$.

Линейный оператор A, определенный на линейном нормированном пространстве E, с областью значений, расположенной в линейном нормированном пространстве E_1, называется вполне непрерывным, если он отображает всякое ограниченное множество пространства E в компактное множество пространства E_1.

Оператор A называется ограниченным, если можно указать такое положительное число K, что для всех $x \in B \parallel Ax \parallel \leq K \parallel x \parallel$. Наименьшее из значений K, при которых выполняется предыдущее неравенство, называется нормой оператора A и обозначается $\parallel A \parallel$. Отметим, что $\parallel A \parallel = \sup\limits_{\|x\|=1} \parallel Ax \parallel$.

Множество линейных ограниченных операторов, действующих из B пространства X в B пространства Y, обозначается через $B[X, Y]$ или $[X, Y]$.

Теорема 1.3.1 (Банаха [118]). *Пусть $X-B$ – пространство, оператор $U \in B[X, X]$. Тогда, если*

$$\parallel U \parallel \leq q < 1, \tag{1.3.1}$$

оператор $I - U$ имеет непрерывный обратный оператор, причем

$$\parallel (I - U)^{-1} \parallel \leq \frac{1}{1 - q}. \tag{1.3.2}$$

Замечание 1.3.1. *Отметим, что гильбертовы пространства, в которых будем на протяжении всей работы проводить обоснование итерационных методов, являются рефлексивными. Определение рефлексивных пространств дано в* [83].

При обосновании вычислительных схем используется следующее утверждение, принадлежащее Л. Я. Обломской [128].

Теорема 1.3.2. [128] *Пусть U – линейный оператор, действующий в рефлексивном банаховом пространстве и обладающий свойством: существует такая константа C, что $\|U^n\| \leq C$, $n=0, 1, 2, ...$*

Тогда итерационный метод

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) U x_n, \quad 0 < \varepsilon_0 \le \alpha_n \le \varepsilon_1 < 1,$$

сходится к неподвижной точке x^* оператора $U : Ux^* = x^*$.

Теорема 1.3.3. [128] *Пусть X – рефлексивное банахово пространство; $A-$ линейный оператор с нормой $\| A \| = 1$. Тогда итерационный процесс*

$$x_{n+1} = \lambda_n x_n + (1 - \lambda_n)(Ax_n + f),$$

$n = 0, 1, \ldots$, где $0 < \alpha < \lambda_n < \beta < 1$, сходится к решению x^* уравнения $x = Ax + f$, если последнее имеет решение.

Теорема 1.3.4 (Адамара [57]). *Если для квадратной матрицы A с элементами $A = \{a_{kl}\}$, $k, l = 1, \ldots, n$, выполняются n неравенств*

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \ne i}^{n} |a_{ij}|, \; i = 1, \ldots, n,$$

то матрица A является невырожденной.

1.3.2. Линейные уравнения

Рассмотрим систему линейных уравнений

$$Ku = f. \tag{1.3.3}$$

Исследуем устойчивость решения системы (1.3.3) в пространстве R_n с нормой

$$\|u\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |u_i|^2 \right)^{1/2}.$$

В линейной алгебре устойчивость решения системы линейных алгебраических уравнений (1.2.3) связывают с числом обусловленности матрицы K. Напомним определение числа обусловленности.

Определение 1.3.1. *Числом обусловленности матрицы K называется число* [175]*, определяемое следующим выражением:*

$$\mathrm{cond(K)} = \|\mathrm{K}\| \|\mathrm{K}^{-1}\|.$$

Для вычисления нормы обратной матрицы можно воспользоваться численными методами, приведенными в [8].

Приведенная оценка числа обусловленности является оценкой сверху и значительно завышена. Численные эксперименты, в частности проведенные при выполнении диссертации [90], показывают намного большую устойчивость методов используемых, нежели это следует из приведенной оценки.

Это говорит о том, что в общем случае числа обусловленности не являются достаточно информативным методом оценки устойчивости систем алгебраических уравнений. Приведем еще одну оценку, которая более точно характеризует устойчивость, нежели число обусловленности, и может быть полезной при практических расчетах. Рассмотрим систему уравнений $Ku = f$. Пусть u^* – точное решение уравнения $Ku = f$.

На практике вместо уравнения $Ku = f$ рассматривается уравнение $(K + \Delta K)u = f$, имеющее точное решение $\tilde{u}^*$.

Нетрудно видеть, что

$$u^* - \tilde{u}^* = K^{-1}((K + \Delta K) - K)(K + \Delta K)^{-1} f.$$

Поэтому

$$\|u^* - \tilde{u}^*\| \le \|K^{-1}\|\|\Delta K\|\|(K + \Delta K)^{-1}\|\|f\|.$$

Если правая часть дана с возмущениями, т. е. рассматривается уравнение

$$(K + \Delta K)u = f + \Delta f$$

с точным решением $\overline{u}^*$, то разность $\|u^* - \overline{u}^*\|$ оценивается неравенством

$$\|u^* - \overline{u}^*\| \le$$

$$\le \|K^{-1}\|\|\Delta K\|\|(K+\Delta K)^{-1}\|\|f\| + \|(K+\Delta K)^{-1}\|\|\Delta f\|, \qquad (1.3.4)$$

где $\overline{u}^*$ – решение уравнения $(K + \Delta K)u = f + \Delta f$. Отметим, что при получении неравенства (1.3.4) была использована обобщенная теорема Банаха [118].

Для того чтобы отфильтровать погрешность и сделать процесс вычислений более устойчивым, для решения уравнения $Ku = f$ предлагается метод итерации [128]:

$$u_{i+1} = u_i - \gamma(\alpha u_i + K^* K u_i - K^* f), \ i = 1, 2, ..., \qquad (1.3.5)$$

где $\gamma = \min\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\|A^* A\|}\right)$, α – параметр регуляризации.

Сходимость итераций исследована в [19]. При использовании этих итераций погрешность имеет тот же порядок, что и величина возмущения правых частей и элементов матрицы.

При решении уравнения (1.3.3) по итерационной схеме (1.3.5) необходимо определить правила остановки итерационного процесса. Вопросам остановки итерационных методов при решении некорректных задач посвящена, в частности, работа [89]. Помимо описанных в [89] методов, можно остановить итерационный процесс по невязке. Для этого при каждой итерации вычисляется одна из невязок (решения уравнения $\|Ku-f\|$ или метода $\|\alpha u+K^*Ku-K^*f\|$, или обе невязки) и запоминается номер итерации и решение, имеющее наименьшую невязку. Проведя достаточно большое число итераций и проделав все эти операции, в качестве решения выбирается то, которое имело наименьшую невязку при выполнении всех последовательных итераций.

1.4. Элементы теории функций

1.4.1. Классы функций

Определение 1.4.1. *Пусть L – гладкая кривая и $\varphi(t)$ – функция точек этой кривой. Функция $\varphi(t)$ удовлетворяет условию Гельдера $H_\alpha(A)$ и для любых двух точек t_1 и t_2 этой кривой выполняется неравеество $|\varphi(t_2)-\varphi(t_1)| \le A|t_1-t_2|^\alpha$, где $A,\alpha-$ положительные числа. Константа A называется постоянной Гельдера, а $\alpha-$ показателем Гельдера.*

Определение 1.4.2. [59] *Если функция $F(x)$ задана на действительной оси, то условие Гельдера заключается в существовании постоянных A и $\lambda, 0<\lambda\le 1$, таких, что для любых действительных x_1 и x_2 $|F(x_1)-F(x_2)| \le A|x_1-x_2|^\lambda$ и для любых по модулю больших единицы x_1 и x_2 $|F(x_1)-F(x_2)| \le A\left|\dfrac{1}{x_1}-\dfrac{1}{x_2}\right|^\lambda$.*

Определение 1.4.3. [59] *Пусть $F(x)$ – изображение, полученное применением преобразования Фурье к функции $f(x)$. Символом $\{\{0\}\}$ обозначен класс функций-изображений, принадлежащих $L_2(-\infty,\infty)$ и удовлетворяющих условию Гельдера. Через $\{0\}$ обозначен класс функций-оригиналов $f(t)$, интегралы Фурье которых принадлежат классу $\{\{0\}\}$.*

Определение 1.4.4. [59] *Функция $f(x)$ принадлежит классу $\{\alpha\}$, если*

$$f(x)e^{-\alpha x} \in \{0\}.$$

Введем обозначения:

$$f_+(x) = \begin{cases} f(t), & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \quad f_-(x) = \begin{cases} 0, & t \geq 0, \\ -f(t), & t < 0. \end{cases}$$

Определение 1.4.5. [59] *Функция $f(x) = f_+(x) - f_-(x)$ принадлежит классу $\{a, b\}$, если $f_+(x) \in \{a\}, f_-(x) \in \{b\}$.*

Определение 1.4.6. [59] *Функции $F^+(x), (F^-(x))$ принадлежат классам $\{\{0, \infty\}\}$ ($\{\{-\infty, 0\}\}$), если они аналитические в верхней (нижней) полуплоскости и выполнено условие $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |F^+(x+iy)|^2 dx \leq M$, в котором константа M не зависит от y.*

Определение 1.4.7. *Пусть L – гладкая кривая и $\varphi(t)$– функция точек этой кривой. Класс $W^r(1)$ состоит из функций, имеющих непрерывные производные до $(r-1)$-го порядка и кусочно-непрерывную производную r-го порядка, причем $\max |\varphi^{(r)}(t)| \leq 1$.*

Определение 1.4.8. *Класс функций $W^r H_\alpha(A)$ состоит из функций, входящих в класс W^r, и таких, что*

$$|\varphi^{(r)}(t_1) - \varphi^{(r)}(t_2)| \leq A|t_1 - t_2|^\alpha.$$

Определение 1.4.9. [123] *Пусть $f(t) \in C[a, b]$, $h_n(t) = \sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k t^k$ – полином степени n; H_n – множество полиномов степени не выше n. Полином $h_n^*(t, f) = \sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k^* t^k$ называется полиномом наилучшего равномерного приближения степени n функции $f(t)$ на сегменте $[a, b]$, если*

$$\|f(t) - h_n^*(t, f)\|_C = \inf_{h_n \in H_n} \|f(t) - h_n(t)\|.$$

Определение 1.4.10. [123] *Пусть $f \in C[a, b]$ и $h_n^*(t, f)$– полином наилучшего равномерного приближения степени n функции $f(t)$ на сегменте $[a, b]$, тогда величина $E_n(f) = \|f(t) - h_n^*(f, t)\|_{C[a,b]}$ называется наилучшим равномерным приближением функции $f(t)$ на сегменте $[a, b]$ полиномами n-го порядка.*

1.4.2. Пространства функций

Здесь описывается ряд пространств функций, которые используются на протяжении работы.

Определение 1.4.11. *Через $C[a,b]$ обозначено банахово пространство непрерывных функций, определенных на сегменте $[a,b]$ с нормой $\|f(x)\| = \max\limits_{a\le x\le b} |f(x)|$.*

Определение 1.4.12. *Через $H_\beta(L)$ обозначается банахово пространство функций, определенных на кривой L, с нормой*

$$\|x(t)\| = M(x) + H(x;\beta) = \max_{t\in L} |x(t)| + \sup_{t_1\neq t_2} \frac{|x(t_1)-x(t_2)|}{|t_1-t_2|^\beta}.$$

Определение 1.4.13. *Через $H_\beta(-\infty,\infty)$ обозначено пространство функций, определенных на числовой оси, с нормой*

$$\|x\| = M(x) + H(x;\beta) = \max_{\infty<t<\infty} |x(t)| + \sup_{t_1\neq t_2} \frac{|x(t_1)-x(t_2)|}{|t_1-t_2|^\beta}.$$

Определение 1.4.14. *Пусть γ – единичная окружность с центром в начале координат, расположенная в плоскости комплексной переменной z. Через $L_2(\gamma)$ обозначено банахово пространство функций, определенных на γ, с нормой*

$$\|x(t)\| = \left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |(x(t))|^2 ds\right]^{\frac{1}{2}}, t = e^{is}.$$

Определение 1.4.15. *Через $L_2(-\infty,\infty)$ обозначено банахово пространство функций $\varphi(t)$, суммируемых с квадратом, в котором норма определена равенством*

$$\|\varphi(t)\| = \left[\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(\tau)|^2 d\tau\right]^{\frac{1}{2}}.$$

1.5. Интегральные преобразования

1.5.1. Интегральное преобразование Фурье

Преобразование Фурье является мощным средством решения и исследования многочисленных задач математической физики, механики и техники.

В этом разделе приводятся без доказательства основные свойства преобразования Фурье. Читатель, заинтересовавшийся доказательством этих свойств, может найти их в книгах [59, 169] или, воспользовавшись приведенными ниже определениями прямого и обратного преобразования Фурье, провести их самостоятельно.

Интегралом Фурье от функции $f(t)$ называется функция

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{ixt} dt, \; -\infty < x < \infty. \tag{1.5.1}$$

В курсе математического анализа доказывается, что интегралу (1.5.1) соответсвует взаимная формула

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(x) e^{-ixt} dx, -\infty < t < \infty. \tag{1.5.2}$$

Исходную функцию $f(t)$ называют оригиналом, а $F(x)$ – изображением. Оригиналы и изображения будем соответственно обозначать строчными и прописными буквами.

Так как и оригиналы, и изображения являются функциями, то естественно считать их элементами некоторых нормированных пространств. Наиболее часто предполагают их принадлежащими пространству $L_2(-\infty, \infty)$. Предпочтение, которое оказывается пространству $L_2(-\infty, \infty)$ по отношению к другим пространствам функций, основано на следующих двух теоремах.

Теорема 1.5.1. *Если оригинал $f(t)$ принадлежит $L_2(-\infty, \infty)$, то изображение $F(x)$ также принадлежит $L_2(-\infty, \infty)$ и наоборот.*

Теорема 1.5.2 (формула Парсеваля)**.** *Если оригинал $f(t)$ принадлежит $L_2(-\infty, \infty)$, то справедливо равенство*

$$\|F(x)\|_{L_2(-\infty,\infty)} = \|f(t)\|_{L_2(-\infty,\infty)}.$$

Впредь, говоря об оригиналах $f(t)$ и изображениях $F(x)$, будем предполагать, что они принадлежат некоторым определенным пространствам функций.

Оператор, ставящий в соответствие функции $f(t)$ ее интеграл $F(x)$ (по формуле (1.5.1)), называется преобразованием Фурье. Этот оператор, следуя [59], будем обозначать буквой V : $F = Vf$. Оператор, ставящий в соответствие функции $F(x)$ функцию $f(t)$ (по формуле (1.5.2)), называется обратным преобразованием Фурье и

обозначается через V^{-1} : $V^{-1}F(x) = f(t)$. Равенство (1.5.2) называется формулой обращения.

Интеграл

$$h(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t-s)g(s)ds \tag{1.5.3}$$

называется сверткой двух функций $f(t)$ и $g(t)$. Сделав в интеграле замену переменных $t - s = u$, легко получаем

$$h(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(u)g(t-u)du, \tag{1.5.4}$$

т.е. свертка симметрична относительно свертываемых функций.

Свертка двух функций обозначается символом $*$. Формулы (1.5.3) и (1.5.4) означают, что $h(t) = f * g = g * f$.

Исключительно важное значение в теории преобразования Фурье имеют следующие теоремы о свертке.

Теорема 1.5.3. *Преобразование Фурье свертки*

$$h(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t-s)g(s)ds$$

равно произведению преобразований Фурье свертываемых функций, т.е.

$$V(f * g) = V(f)V(g).$$

Теорема 1.5.4. *Обратное преобразование Фурье произведения изображений $F(x), G(x)$ равно свертке оригиналов, т.е.*

$$V^{-1}(V(f)V(g)) = f * g.$$

Приведем еще ряд полезных свойств преобразования Фурье:

1. Формула свертки изображений:

$$V(fg) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(x-s)G(s)ds = F * G.$$

2. Интеграл Фурье комплексно сопряженной функции:

$$(V\overline{f(t)})(x) = \overline{F(-x)}, \;\; V^{-1}\overline{F(x)} = \overline{f(-t)}.$$

3. Обобщенные равенства Парсеваля:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(-s)g(s)ds = \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(x)G(x)dx,$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(s)g(s)ds = \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(-x)G(x)dx,$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(s)\overline{g(s)}ds = \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(-x)G(x)dx.$$

4. Сдвиг в оригинале. Если η – вещественное число, то

$$Vf(t-\eta) = e^{i\eta x}F(x),\ V^{-1}(e^{i\eta x}F(x)) = f(t-\eta).$$

5. Сдвиг в изображении. Если η – вещественное число, то

$$V(e^{-i\eta t}f(t)) = F(x-\eta),\ V^{-1}F(x-\eta) = e^{-i\eta t}f(t).$$

6. Формула подобия. Для отличного от нуля вещественного λ

$$Vf(\lambda t) = \frac{1}{|\lambda|}F\left(\frac{x}{\lambda}\right).$$

7. Интеграл Фурье от изображения:

$$VF(t) = f(-x),\ \text{или}\ (V^2 f(t))(x) = f(-x).$$

8. Преобразование производной оригинала. Если оригинал n раз дифференцируем и все производные $f^{(k)}(t),\ 1 \le k \le n$, принадлежат классу $\{0\}$, то

$$V(f^{(k)}(t)) = (-ix)^k F^{(k)}(x),\ k = 1, 2, \ldots, n.$$

9. Умножение на t^k. Если функция $t^n f(t) \in \{0\}$, то

$$V(t^k f(t)) = (-i)^k F^{(k)}(x),\ k = 1, 2, \ldots, n.$$

Наряду с преобразованием Фурье на практике часто используются две пары симметричных формул:

$$\begin{cases} F_c(z) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\displaystyle\int\limits_0^{\infty} f(u)\cos zu du, \\ f(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\displaystyle\int\limits_0^{\infty} F_c(z)\cos xz dz; \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_s(z) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \displaystyle\int_0^\infty f(u) \sin zu du, \\ f(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \displaystyle\int_0^\infty F_s(z) \sin xz dz, \end{cases}$$

которые называются соответственно косинус-преобразованием и синус-преобразованием Фурье. Этим преобразованиям присущи свойства, аналогичные описанным выше для преобразования Фурье.

1.5.2. Дискретное преобразование Фурье

Дискретным аналогом интегрального преобразования Фурье (1.5.1) является разложение периодической функции $f(t)$ в ряд Фурье. Пусть $f(t)$ – периодическая функция с периодом, равным 1, допускающая разложение в ряд Фурье:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{2\pi i k t}, \tag{1.5.5}$$

где $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} |a_k| < \infty$.

Коэффициенты Фурье a_k определяются по формуле

$$a_k = \int_0^1 f(t) e^{-2\pi i k t} dt. \tag{1.5.6}$$

Пусть функция $f(t)$ задана на сетке узлов $t_k = \dfrac{k}{N}$, $k = 0, 1, ..., N$. Тогда, вычисляя интеграл (1.5.6), по формуле прямоугольников имеем $a_k \approx A_k = \dfrac{1}{N} \sum\limits_{l=0}^{N-1} f_l e^{-2\pi i k t_l}$, где $f_l = f(t_l)$.

Введем обозначение $\omega_N = e^{-2\pi i/N}$, тогда

$$A_k = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} f_l \omega_N^{kl}, \ k = 0, 1, \ldots, N-1. \tag{1.5.7}$$

Формула (1.5.7) определяет дискретное преобразование Фурье (ДПФ). Обратное преобразование ДПФ определяется равенством

$$f_l = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} A_k \omega_N^{-kl}, \ l = 0, 1, \ldots, N-1. \tag{1.5.8}$$

Непосредственными подсчетами можно убелиться в том, что формулы (1.5.7) и (1.5.8) взаимны.

1.5.3. Преобразование Лапласа

Определение 1.5.1. *Функция $f(t)$ действительной переменной t называется функцией-оригиналом, если она удовлетворяет следующим условиям:*

1. $f(t) = \begin{cases} 0, & -\infty < t < 0 \\ f(t), & t \geq 0. \end{cases}$
2. *Функция $f(t)$ кусочно-непрерывная (имеет конечное число точек разрыва первого рода).*
3. *Для любого значения параметра $t > 0$ существуют $M > 0$ и $s_0 \geq 0$ такие, что $|f(t)| \leq Me^{s_0 t}$.*

При этом число s_0 называется показателем роста функции $f(t)$ (при $s_0 = 0$ получаем ограниченную функцию).

Если под переменной t понимать переменную времени, то при выполнении данных условий функцию $f(t)$ можно рассматривать как описание некоторого физического процесса, который начался в момент времени $t = 0$.

Определение 1.5.2. *Изображением функции-оригинала $f(t)$ называется функция $F(p)$ комплексного переменного $p = s + i\sigma$, определяемая интегралом Лапласа:*

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt. \tag{1.5.9}$$

Переход от функции-оригинала $f(t)$ к функции-изображению $F(p)$ записывается в виде

$$f(t) \Rightarrow F(p).$$

Теорема 1.5.5 (условие существования изображения)**.** *Если $f(t)$ функция-оригинал с показателем роста s_0, то интеграл Лапласа равномерно сходится в полуплоскости $\mathrm{Re}p > s_0$ и функция $F(p)$ является в ней аналитической.*

Свойства:

1. Свойство линейности.

Если $f(t) = \sum\limits_{i=1}^{n} C_i f_i(t)$ и $f_i(t) \Rightarrow F_i(p)$, $f(t) \Rightarrow F(p)$, то

$$F(p) = \sum_{i=1}^{n} C_i F_i(p).$$

2. Свойство подобия.

Если $f(t) \Rightarrow F(p)$ и λ-число, то $f(\lambda t) \Rightarrow \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{p}{\lambda}\right)$.

3. Свойство смещения (затухания).

Если $f(t) \Rightarrow F(p)$ и $\alpha \equiv \text{const}$, то $e^{\alpha t} f(t) \Rightarrow F\left(p - \alpha\right)$.

4. Свойство запаздывания.

Если $f(t) \Rightarrow F(p)$ и $\tau > 0$, то $f(t - \tau) \Rightarrow e^{-\tau t} F\left(p\right)$.

5. Дифференцирование оригинала.

Если $f(t) \Rightarrow F(p)$ и функции $f'(t), f''(t), ..., f^{(n)}(t)$ являются функциями-оригиналами, то

$$f'(t) \Rightarrow pF(p) - f(0),$$

$$f''(t) \Rightarrow p^2 F(p) - pf(0) - f'(0),$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$f^{(n)}(t) \Rightarrow p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - ... - f^{(n-1)}(0).$$

6. Дифференцирование изображения.

Если $f(t) \Rightarrow F(p)$, то

$F'(t) \Leftarrow -tf(t)$, $F''(t) \Leftarrow (-1)^2 t^2 f(t)...$, $F^{(n)}(t) \Leftarrow (-1)^n t^n f(t)$.

7. Интегрирование оригинала.

Если $f(t) \Rightarrow F(p)$, то $\int\limits_0^t f(t)dt \Rightarrow \frac{F(p)}{p}$.

8. Интегрирование изображения.

Если $f(t) \Rightarrow F(p)$ и интеграл $\int\limits_p^\infty F(\rho)d\rho$ сходится, то

$$\int_p^\infty F(\rho)d\rho \Leftarrow \frac{f(t)}{t}.$$

9. Умножение изображений.

Если $f_1(t) \Rightarrow F_1(p)$ и $f_2(t) \Rightarrow F_2(p)$, то

$$F_1(p) \cdot F_2(p) \Leftarrow \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau.$$

Интеграл в правой части данного равенства называется сверткой функций $f_1(t)$, $f_2(t)$ и обозначается

$$f_1(t) * f_2(t) = f_1 * f_2 = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau.$$

Свертка функции подчиняется переместительному закону

$$f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t).$$

10. Теорема Бореля.

Теорема 1.5.6 (Бореля)**.** *Пусть функция $f(t)$ – функция-оригинал, $f(t) \Rightarrow F(p)$, а $\Phi(p)$ и $q(p)$ – аналитические функции в области изображений такие, что $\Phi(p)e^{-\tau q(p)} \Leftarrow \varphi(t,\tau)$, тогда*

$$\int_0^\infty f(\tau)\varphi(t,\tau)d\tau \Rightarrow F(q(p))\Phi(p).$$

11. Интеграл Дюамеля. В практических вычислениях важную роль играет следствие из теоремы о свертке, называемое интегралом Дюамеля.

Теорема 1.5.7. *Если $\int_0^t f(\tau)\varphi(t-\tau)d\tau \Rightarrow F(p)\cdot\Phi(p)$, где $f(t) \Rightarrow F(p)$ и $\varphi(t) \Rightarrow \Phi(p)$, тогда*

$$\int_0^t f(\tau)\varphi_t'(t-\tau)d\tau + f(t)\varphi(0) \Rightarrow pF(p)\Phi(p).$$

12. Умножение оригиналов.
Если $f_1(t) \Rightarrow F_1(p)$ и $f_2(t) \Rightarrow F_2(p)$, то

$$f_1(t) \cdot f_2(t) \Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F_1(z)F_2(p-z)dz.$$

Обратное преобразование Лапласа

Обратное преобразование Лапласа позволяет по изображению $F(p)$ находить функцию-оригинал $f(t)$. Во многих случаях для этих целей пользуются теоремами разложения, которые основаны на свойствах преобразования Лапласа и теории аналитических функций.

Теорема 1.5.8 (первая теорема разложения). *Если функция $F(p)$ является изображением некоторой функции $f(t)$, может быть представлена в виде ряда Лорана $F(p) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{p^{n+1}}$ в окрестности точки $p = \infty$, то функция*

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} t^n$$

является оригиналом для F(p).

Теорема 1.5.9 (вторая теорема разложения). *Пусть изображение функции $f(t)$ является правильной дробно-рациональной функцией $F(p) = \dfrac{\psi_s(p)}{\varphi_n(p)}$, знаменатель которой имеет корни $a_1, a_2, \ldots, a_n$ соответствующей кратности k_1, k_2, $\ldots$, k_n, т.е. $k_1+k_2+\cdots+k_n = n$. Тогда оригинал функции определяется по формуле*

$$\begin{aligned} f(t) = \tfrac{1}{(k_1-1)!} \lim\limits_{p\to\alpha_1} \tfrac{d^{k_1-1}}{dp^{k_1-1}} \left[(p-\alpha_1)^{k_1} \tfrac{\psi_s(p)}{\varphi_n(p)} e^{pt}\right] + \ldots \\ \ldots + \tfrac{1}{(k_n-1)!} \lim\limits_{p\to\alpha_n} \tfrac{d^{k_n-1}}{dp^{k_n-1}} \left[(p-\alpha_n)^{k_n} \tfrac{\psi_s(p)}{\varphi_n(p)} e^{pt}\right] = \\ = \sum_{i=1}^{m} \tfrac{1}{(k_i-1)!} \lim\limits_{p\to\alpha_i} \tfrac{d^{k_i-1}}{dp^{k_i-1}} \left[(p-\alpha_i)^{k_i} \tfrac{\psi_s(p)}{\varphi_n(p)} e^{pt}\right], \end{aligned}$$

т.е.

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Res}(\mathrm{F}(\alpha_\mathrm{k})\mathrm{e}^{-\alpha_\mathrm{k}\mathrm{t}}),$$

где $\mathrm{Res}(\varphi(t))$ *– вычет функции* $\varphi(t)$.

Формула Римана – Меллина

Прямое преобразование Лапласа, как известно, определяется как

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt.$$

Обратное преобразование Лапласа дает возможность получить функцию-оригинал через известную функцию-изображение:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} F(p) e^{pt} dp = \frac{1}{2\pi i} \lim_{w\to\infty} \int_{s-iw}^{s+iw} F(p) e^{pt} dp,$$

где s – некоторая константа.

Данная формула является общим способом нахождения оригинала функции. Однако ее непосредственное использование возможно лишь в исключительных случаях, так как интеграл в правой части берется в аналитическом виде для очень узкого класса функций. Обычно этой формулой пользуются при вычислении оригинал-функции численным методом.

1.5.4. Z-преобразование

Определение 1.5.3. *Z-преобразованием числовой последовательности $f_k, k = 0, 1, 2, ...,$ называется функция $F(z)$ комплексной переменной z, которая определяется рядом*

$$F(z) = Z[f_k] = f_0 + f_1 z^{-1} + f_2 z^{-2} + ... = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^{-k}; \qquad (1.5.10)$$

если $|f_k| \leq Me^{s_0 k}$ при $k = 0, 1, ...,$ то ряд (1.5.10) сходится вне круга $|z| > e^{s_0}$.

Соответствующая формула обращения имеет вид

$$f_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_C F(z) z^{k-1} dz, \;\; k = 0, 1, 2, ..., \qquad (1.5.11)$$

где C – контур интегрирования, содержащий все особые точки функции $F(z)$.

Свойства:

1. Линейность.

Если $F(z) = Z[f_k]$ и $G(z) = Z[g_k]$, то

$$Z[\alpha f_k + \beta g_k] = \alpha Z[f_k] + \beta Z[g_k] = \alpha F(z) + \beta G(z).$$

2. Опережение.

Если $F(z) = Z[f_k]$, то

$$Z[f_{k+1}] = zF(z) - f_0 z,$$

$$...$$

$$Z[f_{k+r}] = z^r F(z) - \sum_{i=0}^{r-1} f_i z^{r-i}.$$

3. Запаздывание.

Если $F(z) = Z[f_k]$, то $Z[f_{k-r}] = z^{-r} F(z), r = 1, 2, ...$

4. Конечные разности.

Пусть $F(z) = Z[f_k]$, $\triangle f_k = f_{k+1} - f_k$ – нисходящие конечные разности, $\nabla f_k = f_k - f_{k-1}$ – восходящие конечные разности, тогда

$$Z[\triangle f_k] = (z-1)F(z) - f_0 z, \;\; Z[\nabla f_k] = \frac{z-1}{z}F(z).$$

5. Суммирование последовательности.

Пусть $F(z) = Z[f_k]$, тогда

$$Z\left[\sum_{k=0}^{\infty} f_k\right] = \frac{z}{z-1}F(z).$$

6. Свертка последовательностей.

Пусть $F(z) = Z[f_k]$ и $G(z) = Z[g_k]$, тогда

$$Z\left[\sum_{i=0}^{\infty} f_i g_{k-i}\right] = F(z)G(z).$$

1.5.5. Преобразование Меллина

Пусть $\sigma, \sigma_1, \sigma_2$ – вещественные числа, $s = \sigma + i\omega$ и $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$. Пусть функция $f(t)$ определена при $t > 0$ и удовлетворяет условиям

$$\int_0^1 |f(t)|\, t^{\sigma_1 - 1} dt < \infty; \int_0^\infty |f(t)|\, t^{\sigma_2 - 1} dt < \infty.$$

Тогда преобразование Меллина определяется формулой

$$\hat{f}(s) = \mathfrak{M}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t) t^{s-1} dt. \qquad (1.5.12)$$

Обратное преобразование Меллина определяется формулой

$$f(t) = \mathfrak{M}^{-1}(\hat{f}(s)) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \hat{f}(s) t^{-s} dt.$$

Свойства преобразования Меллина:

1. Линейность.

Пусть $\hat{f}_1(s) = \mathfrak{M}\{f_1(t)\}$ и $\hat{f}_2(s) = \mathfrak{M}\{f_2(t)\}$, тогда

$$\mathfrak{M}\{\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)\} = \alpha \hat{f}_1(s) + \beta \hat{f}_1(s).$$

2. Подобие.
Пусть $\hat{f}(s) = \mathfrak{M}\{f(t)\}$, тогда

$$\mathfrak{M}\{f(\alpha t)\} = \alpha^{-s}\hat{f}(s), \text{ где } \alpha > 0.$$

3. Сдвиг аргумента.
Пусть $\hat{f}(s) = \mathfrak{M}\{f(t)\}$, тогда

$$\mathfrak{M}\{t^{\alpha}f(t)\} = \hat{f}(s+\alpha).$$

4. Квадратичный аргумент.
Пусть $\hat{f}(s) = \mathfrak{M}\{f(t)\}$, тогда

$$\mathfrak{M}\{f(t^2)\} = \frac{1}{2}\hat{f}\left(\frac{1}{2}s\right).$$

5. Изменение знака у изображения.
Пусть $\hat{f}(s) = \mathfrak{M}\{f(t)\}$, тогда

$$\mathfrak{M}\{f\left(\frac{1}{t}\right)\} = \hat{f}\left(-s\right).$$

6. Преобразование оригинала, содержащее степени.
Пусть $\hat{f}(s) = \mathfrak{M}\{f(t)\}$, тогда

$$\mathfrak{M}\left\{t^{\lambda}f\left(\alpha t^{\beta}\right)\right\} = \frac{1}{\beta}\alpha^{-\frac{s+\lambda}{\beta}}\hat{f}\left(\frac{s+\lambda}{\beta}\right),$$

где $\alpha > 0, \beta \neq 0$.

7. Дифференцирование.
Пусть $\hat{f}(s) = \mathfrak{M}\{f(t)\}$, тогда $\mathfrak{M}\{f_t'(t)\} = -(s-1)\hat{f}\left(s-1\right)$.

8. Дифференцирование.
Пусть $\hat{f}(s) = \mathfrak{M}\{f(t)\}$, тогда $\mathfrak{M}\left\{tf_t'(t)\right\} = -s\hat{f}\left(s\right)$.

9. Многократное дифференцирование.
Пусть $\hat{f}(s) = \mathfrak{M}\{f(t)\}$, тогда

$$\mathfrak{M}\left\{f_t^{(n)}\left(t\right)\right\} = (-1)^n\frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s-n)}\hat{f}\left(s-n\right),$$

где $\Gamma(s)-$ гамма-функция.

10. Многократное дифференцирование.
Пусть $\hat{f}(s) = \mathfrak{M}\{f(t)\}$, тогда

$$\mathfrak{M}\left\{\left(t\frac{d}{dt}\right)^n f(t)\right\} = (-1)^n s^n\hat{f}\left(s\right).$$

11. Сложное интегрирование.
Пусть $\hat{f}_1(s) = \mathfrak{M}\{f_1(t)\}$ и $\hat{f}_2(s) = \mathfrak{M}\{f_2(t)\}$, тогда

$$\mathfrak{M}\left\{x^\alpha \int_0^\infty t^\beta f_1(xt) f_2(t) dt\right\} = \hat{f}_1(s+\alpha)\hat{f}_2(1-s-\alpha+\beta).$$

12. Сложное интегрирование.
Пусть $\hat{f}_1(s) = \mathfrak{M}\{f_1(t)\}$ и $\hat{f}_2(s) = \mathfrak{M}\{f_2(t)\}$, тогда

$$\mathfrak{M}\left\{x^\alpha \int_0^\infty t^\beta f_1\left(\frac{x}{t}\right) f_2(t) dt\right\} = \hat{f}_1(s+\alpha)\hat{f}_2(s+\alpha+\beta+1).$$

1.6. Преобразование Лорана

Пусть задана бесконечная числовая последовательность

$$a = \ldots, a_{-n}, \ldots, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots \tag{1.6.1}$$

Предположим, что элементы последовательности удовлетворяют неравенству

$$|a_n| \le \frac{c}{\overline{n}^{1+\lambda}},\ 0 < \lambda \le 1,\ n = \ldots, -1, 0, 1, \ldots, \tag{1.6.2}$$

где $\overline{n} = |n|$ при $n \neq 0$ и $\overline{n} = 1$ при $n = 0$.

Замечание 1.6.1. *Здесь и всюду ниже через c обозначается константа, независящая от n.*

Определение 1.6.1. [59] *Числовая последовательность a, определяемая выражением* (1.6.1), *принадлежит классу* $\{1\}$, *если выполнены неравенства* (1.6.2).

Поставим вектору a в соответствие функцию комплексной переменной

$$A(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k. \tag{1.6.3}$$

Из условия (1.6.2) следует, что ряд $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|$ сходится.

Следовательно, при $|z| = 1$ ряд (1.6.3) абсолютно сходится.

Умножая равенство (1.6.3) почленно на z^{-k-1} и интегрируя по единичной окружности с центром в начале координат, имеем

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t|=1} \frac{A(t)}{t^{k+1}} dt. \tag{1.6.4}$$

Справедливость этой формулы следует из возможности почленного интегрирования равномерно сходящего ряда.

Обозначим через $A^+(z)$ и $A^-(z)$ ряды

$$A^+(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, A^-(z) = -\sum_{k=-\infty}^{-1} a_k z^k.$$

Пусть ряд $A^+(z)$ сходится в области $|z| < R$, а ряд $A^-(z)$ – в области $|z| > r$, причем

$$R > r, \tag{1.6.5}$$

и пусть ρ – число, удовлетворяющее неравенству

$$r < \rho < R. \tag{1.6.6}$$

Таким образом, функция $A^+(z)$ является аналитической в области $|z| < R$, $A^-(z)$ – аналитической в области $|z| > \rho$, а функция $A(z) = A^+(z) - A^-(z)$ – аналитической в области $r < |z| < R$.

Определение 1.6.2. [59] *Соотношения*

$$A(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k, \tag{1.6.7}$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=\rho} \frac{A(z)}{z^{n+1}} dz, \ n = ..., -1, 0, 1, ... \tag{1.6.8}$$

определяют соответственно прямое (1.6.7) *и обратное* (1.6.8) *преобразования Лорана.*

Символически их обозначим $A(z)=La=L_\rho a$, $a=L^{-1}A=L_\rho^{-1}A$.

Введем обозначения

$$a_n^+ = \begin{cases} a_n, \ n \geq 0, \\ 0, \ n < 0, \end{cases} \quad a_n^- = \begin{cases} 0, \ n \geq 0, \\ -a_n, \ n < 0. \end{cases}$$

Вектору $a=(..., a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, ...)$ поставим в соответствие вектора $a^+=(..., 0, 0, a_0^+, a_1^+, a_2^+, ...)$ и $a^- = (\dots, a_{-2}^-, a_{-1}^-, 0, 0, 0, \dots)$, которые называются соответственно правым и левым односторонними векторами. Очевидно, $a = a^+ - a^-$.

Определение 1.6.3. [59] *Пусть a,x – два вектора, принадлежащих классу* $\{1\}$. *Вектор* h, *определенный составляющими векторов* a,x *как* $h_n = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} a_{n-k}x_k$, $n = 0, \pm 1, \dots$, *называется сверткой векторов* a *и* x.

Обозначим через $A(t)=La= \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} a_k t^k$ и $X(t)=Lx= \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} x_k t^k$, $|t|=1$, дискретные преобразования векторов a и x.

Применяя преобразование Лорана к вектору h, являющемуся сверткой векторов a и x, имеем [59]

$$Lh = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{n-k}x_k t^n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m t^m \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k t^k = A(t)X(t).$$

Таким образом, дискретное преобразование Лорана свертки двух векторов равно произведению этих преобразований от составляющих векторов свертки.

Наряду с векторами из класса $\{1\}$ при исследовании дискретных уравнений в свертках используются векторы из классов $\{r\}$ и $\{r, R\}$.

Определение 1.6.4. [59] *Вектор* $a = (\dots, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \dots)$ *принадлежит классу* $\{r\}$, *если вектор* $a^r = (\dots, a_{-2}r^{-2}, a_1 r^{-1}, a_0, a_1 r, a_2 r^2, \dots)$ *принадлежит классу* $\{1\}$. *Другими словами, вектор* a *принадлежит классу* $\{r\}$, *если*

$$a_n \le C/\left(\overline{n}^{1+\lambda}|r|^n\right),\ \lambda > 0,\ n = 0, \pm 1, \dots,$$

где

$$\bar{n} = \begin{cases} |n|,\ n \ne 0, \\ 1,\ n = 0. \end{cases}$$

Замечание 1.6.2. *Здесь и ниже через* C *обозначются константы не зависящие от* n.

Определение 1.6.5. [59] *Вектор* $a = a^+ - a^-$ *принадлежит классу* $\{r, R\}$, *если* $a^+ \in \{R\}, a^- \in \{r\}$.

Если вектор $a^+ \in \{R\}$, то $|a_n R^n| \le kC/\left(\overline{n}^{1+\lambda}\right)$ и, следовательно, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ равномерно сходится.

По теореме Абеля ряд $A^+(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ равномерно сходится в области $|z| < R$ и функция $A^+(z)$ в указанной области является аналитической. Очевидно, если $a^+ \in \{R\}$, то $a^+ \in \{0, R\}$.

Аналогично, ряд $A^-(z) = -\sum\limits_{n=-\infty}^{-1} a_n z^n$ равномерно сходится в области $|z| > r$ и функция $A^-(z)$ в этой области является аналитической. Очевидно, если $a^- \in \{r\}$, то $a^- \in \{r, \infty\}$.

Так как $A(z) = A^+(z) - A^-(z)$, то функция $A(z)$ является аналитической в области $r < |z| < R$.

Отметим, если вектор a принадлежит классу $\{r\}$, то $a \in \{r, r\}$.

Теорема 1.6.1. [59] *Если вектора* $a \in \{r, R\}$, $x \in \{\rho, \sigma\}$ *и отрезки* $[r, R]$,$[\rho, \sigma]$ *имеют общую часть, т.е.* $\max(r, \rho) \le \min(R, \sigma)$, *то свертка существует и* $h \in \{\max(r, \rho), \min(R, \sigma)\}$. *Преобразование Лорана свертки* $H(z) = Lh = A(z)X(z)$ *есть функция, аналитическая в кольце* $\max(r, \rho) < |z| < \min(R, \sigma)$.

Теорема 1.6.2. [59] *Если вектор* $a \in \{r, R\}$, $x \in \{\rho, \sigma\}$ *и выполняются условия* $\rho \le R, \sigma \ge r$, *то свертка существует, причем* $h \in \{\max(r, \rho), \min(R, \sigma)\}$.

1.7. Сингулярные интегралы[1]

Пусть функция $f(x)$ задана на сегменте $[a, b]$ и c – внутренняя точка этого сегмента. Рассмотрим интеграл $\int\limits_a^b \dfrac{\varphi(x)}{x - c} dx$, где $\varphi(x)$ – некоторая функция, удовлетворяющая в интервале (a, b) условию Гельдера H_α. Этот интеграл понимается в смысле главного значения по Коши, которое определяется следующим образом:

$$\int\limits_a^b \frac{\varphi(x)}{x - c} dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int\limits_a^{c-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x - c} dx + \int\limits_{c+\varepsilon}^b \frac{\varphi(x)}{x - c} dx \right). \tag{1.7.1}$$

Представим рассматриваемый интеграл в виде суммы интегралов:

$$\int\limits_a^b \frac{\varphi(x)}{x - c} dx = \int\limits_a^b \frac{\varphi(x) - \varphi(c)}{x - c} dx + \varphi(c) \int\limits_a^b \frac{dx}{x - c}. \tag{1.7.2}$$

Так как $\varphi(x) \in H_\alpha$, то $|\varphi(x) - \varphi(c)|/|x - c| \le A|x - c|^{\alpha - 1}$ и, следовательно, первый интеграл из правой части выражения (1.7.2)

[1] Данный пункт написан в соответствии с книгами [58,122].

сходится как несобственный. Ко второму интегралу можно применить формулу (1.7.1). В результате получаем утверждение: особый интеграл $\int\limits_a^b \dfrac{\varphi(x)}{x-c}dx$, где $\varphi(x)$ удовлетворяет условию Гельдера, существует в смысле главного значения по Коши и равен

$$\int\limits_a^b \frac{\varphi(x)}{x-c}dx = \int\limits_a^b \frac{\varphi(x)-\varphi(c)}{x-c}dx + \varphi(c)\ln\left|\frac{b-c}{a-c}\right|.$$

Рассмотрим интеграл типа Коши:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}d\tau, \tag{1.7.3}$$

где $\varphi(\tau)$ удовлетворяет условию Гельдера.

Будем считать, что контур L замкнутый и гладкий. Если контур L окажется незамкнутым, то его можно дополнить произвольной кривой до замкнутого контура, положив на дополнительной кривой $\varphi(\tau) = 0$.

Известно, что функция $\Phi(z)$ является аналитической внутри и вне контура L. Обозначим через $\Phi^+(z)$ значение функции $\Phi(z)$ в случае, когда точка z находится внутри контура L. Аналогично обозначим через $\Phi^-(z)$ значение функции $\Phi(z)$ в случае, когда точка z находится вне контура L.

Обозначим через $\Phi^+(t)$ предельное значение аналитической функции $\Phi(z)$ при стремлении точки z изнутри L к точке t контура. Аналогично через $\Phi^-(t)$ обозначим предельное значение функции $\Phi(z)$ при стремлении точки z к точке t извне контура L.

В 1873 г. Ю. В. Сохоцким [159] были получены формулы

$$\Phi^+(t) = \frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau,\ t \in L,$$

$$\Phi^-(t) = -\frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau,\ t \in L, \tag{1.7.4}$$

которые были строго обоснованы в работах И. Племеля [218, 219].

1.8. Краевая задача Римана[2]

Даны: простой гладкий замкнутый контур L, делящий плоскость комплексной переменной на внутреннюю D^+ и внешнюю D^- области и две функции точек контура $G(t)$ и $g(t)$, удовлетворяющие условию Гельдера, причем $G(t)$ не обращается в нуль.

Задача Римана [58]. Найти две функции: $\Phi^+(z)$ – аналитическую в области D^+, и $\Phi^-(z)$ – аналитическую в области D^-, включая $z=\infty$, удовлетворяющие на контуре L линейному соотношению

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) \quad \text{(однородная задача)} \tag{1.8.1}$$

или

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t) \quad \text{(неоднородная задача).} \tag{1.8.2}$$

Определение 1.8.1. *Индексом χ функции $G(t)$ по контуру L называется разделенное на 2π приращение ее аргумента при обходе кривой L в положительном направлении:*

$$\chi = \mathrm{Ind}G(t) = \frac{1}{2\pi}\left[\arg G(t)\right]_L.$$

Определение 1.8.2. *Индекс χ коэффициента $G(t)$ задачи Римана называется индексом задачи.*

Теорема 1.8.1. [58, 122] *Если индекс χ краевой задачи Римана неотрицателен, то однородная задача* (1.8.1) *имеет $\chi+1$ линейно независимых решений:*

$$\Phi_k^+(z) = z^k e^{\Gamma^+(z)},$$

$$\Phi^-(z) = z^{k-\chi}e^{\Gamma^-(z)}, k = 0, 1, \ldots, \chi,$$

где

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\ln[\tau^{-\chi}G(\tau)]}{\tau - z}d\tau.$$

Общее решение содержит $\chi+1$ линейно независимых функций и определяется формулой

$$\Phi^+(z) = P_\chi(z)e^{\Gamma^+(z)}, \Phi^-(z) = z^{-\chi}P_\chi(z)e^{\Gamma^-(z)},$$

где $P_\chi(z)$ – полином степени χ.

При отрицательном индексе χ задача (1.8.1) *неразрешима.*

[2] Данный пункт написан по материалам [58, 59].

Теорема 1.8.2. [58, 122] *При $\chi \geq 0$ неоднородная задача Римана разрешима при любом свободном члене и ее общее решение дается формулой*

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{2\pi} \int\limits_L \frac{g(\tau)d\tau}{X^+(\tau)(\tau - z)} + X(z)P_\chi(z), \tag{1.8.3}$$

где каноническая функция $X(z)$ определяется формулами

$$X^+(z) = e^{\Gamma^+(z)}, X^-(z) = z^{-\chi}e^{\Gamma^-(z)},$$

$P_\chi(z)$ – полином степени χ с произвольными комплексными коэффициентами. При $\chi = -1$ неоднородная задача также разрешима и имеет единственное решение.

При $\chi < -1$ неоднородная задача, вообще говоря, неразрешима. Для того чтобы она была разрешима, необходимо и достаточно, чтобы свободный член задачи удовлетворял $-\chi - 1$ условиям

$$\int\limits_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}\tau^{k-1}d\tau = 0,\ k = 1, 2, \ldots, -\chi - 1.$$

При выполнении этих условий единственное решение задачи дается формулой (1.8.3), где нужно положить $P_\chi(z) \equiv 0$.

Задача Римана на действительной оси. На действительной оси заданы две функции: $D(x)$ – коэффициент и $H(x)$ – свободный член задачи, $H(x)$ и $D(x)$ принадлежат классу $\{0\}$, причем $D(x) \neq 0$. Требуется найти две функции $F^+(z)$ и $F^-(z)$ аналитические соответственно в верхней и нижней полуплоскостях (одну кусочно-аналитическую функцию), предельные значения которых на действительной оси принадлежат классам $\{\{0, \infty\}\}, \{\{-\infty, 0\}\}$ и удовлетворяют краевому условию

$$F^+(x) = D(x)F^-(x) + H(x). \tag{1.8.4}$$

Определение 1.8.3. *Индексом непрерывной, не обращающейся в нуль, комплексной функции $M(t) = m_1(t) + im_2(t)$, $-\infty < t < \infty$, $M(-\infty) = M(\infty)$, называется изменение аргумента $M(t)$ на действительной оси, выраженное в полных оборотах:*

$$\mathrm{Ind}M(t) = \frac{1}{2\pi}\left[\arg M(t)\right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{2\pi}\ln M(t)\Big|_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\ln M(t).$$

Определение 1.8.4. *Индексом χ краевой задачи* (1.8.4) *называется индекс коэффициента $D(x)$.*

Теорема 1.8.3. [58,59,122] *Однородная краевая задача Римана при $\chi > 0$ имеет точно χ линейно независимых решений вида $z^{k-1}(z+i)^{-\chi}X(z)$ $(k = 1, 2, \ldots, \chi)$; при $\chi \leq 0$ ненулевых решений нет. Здесь*

$$X^+(z) = e^{\Gamma^+(z)}, X^-(z) = \left(\frac{z-i}{z+i}\right)^{-\chi} e^{\Gamma^-(z)},$$

$$F^+(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^\infty \gamma(t) e^{izt} dt, F^-(z) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^0 \gamma(t) e^{izt} dt,$$

$$\gamma(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^\infty (\ln D(t))\, e^{-ixt} dt.$$

Теорема 1.8.4. [58, 59, 122] *Если индекс задачи $\chi \geq 0$, то неоднородная задача Римана* (1.8.4) *безусловно разрешима и ее решение, зависящее от χ произвольных комплексных постоянных, имеет вид*

$$F(z) = X(z) \left[\Psi(z) + (z+i)^{-\chi} P_{\chi-1}(z)\right], \tag{1.8.5}$$

где

$$X^+(z) = e^{\Gamma^+(z)}, X^-(z) = \left(\frac{z-i}{z+i}\right)^{\chi} e^{\Gamma^-(z)},$$

$$\Gamma^+(z) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^\infty \gamma(t) e^{izt} dt, \Gamma^-(t) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^0 \gamma(t) e^{izt} dt,$$

$$\gamma(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^\infty \ln \left[\left(\frac{t-i}{t+i}\right)^{-\chi} D(t)\right] e^{-ixt} dt,$$

$$\Psi^+(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^\infty \psi(t) e^{izt} dt, \psi^-(z) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^0 \Psi(t) e^{izt} dt,$$

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^\infty \frac{H(z)}{X^+(z)} e^{-ixt} dt.$$

Если $\chi < 0$, то однородная задача имеет лишь тривиальное решение, а неоднородная задача при соблюдении условий

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{H(t)}{X^+(t)} \frac{dt}{(t+i)^k} = 0, k = 1, 2, \ldots, |\chi|,$$

имеет единственное решение (1.8.5), *где* $P_{\chi-1}(z) \equiv 0$.

Сформулируем задачу Римана для контура L, состоящего из двух прямых L_1 и L_2, описываемых уравнениями $\mathrm{Im}z = \beta$, $\mathrm{Im}z = \alpha$ ($\alpha < \beta$). На обеих прямых положительным направлением обхода будем считать обход слева направо. Верхний индекс $+(-)$ у функции означает, что эта функция является аналитической слева (справа) от прямой при ее положительном обходе.

Задача Римана на паре прямых заключается в следующем.

Требуется найти функции $F^+(z), F^-(z), \Omega(z)$ аналитические соответственно в полуплоскостях $\mathrm{Im}z > \beta, \mathrm{Im}z < \alpha, \alpha < \mathrm{Im}z < \beta$ и удовлетворяющие уравнениям

$$(1 + K_1(x + i\beta))F^+(x + i\beta) = \Omega(x + i\beta) + H_1(x + i\beta),$$

$$(1 + K_2(x + i\alpha))F^-(x + i\alpha) = \Omega(x + i\alpha) + H_2(x + i\alpha), \qquad (1.8.6)$$

где функции K_1, K_2, H_1, H_2 принадлежат классу $\{\{0\}\}$.

Индекс на каждой прямой определяется формулами

$$\chi_1 = \mathrm{Ind}D_1(x) = -\mathrm{Ind}(1 + K_1(x + i\beta)),$$
$$\chi_2 = \mathrm{Ind}D_2(x) = \mathrm{Ind}(1 + K_2(x + i\alpha)),$$

где $D_1(x) = \dfrac{1}{1 + K_1(x + i\beta)}$, $D_2(x) = 1 + K_2(x + i\alpha)$.

Индекс по всему контуру определяется как сумма индексов

$$\chi = \chi_1 + \chi_2.$$

В предположении, что $(1+K_1(x+i\beta)) \neq 0$ и $(1+K_2(x+i\alpha)) \neq 0$ при $\infty \leq x \leq \infty$ разрешимость приведенной выше краевой задачи Римана определяется следующей теоремой.

Теорема 1.8.5. [59] *Если $\chi \geq 0$, то однородная задача Римана* (1.8.6) *имеет χ линейно независимых решений (при $\chi = 0-$ лишь тривиальное нулевое), а неоднородная задача, безусловно разрешима и решение содержит χ линейно независимых решений. Если*

$\chi < 0$, *то однородная задача не имеет решений, отличных от тривиального, а неоднородная задача разрешима лишь при выполнении* $|\chi|$ *условий разрешимости.*

Решение при $\chi > 0$ выражается формулами

$$F^+(z) = X_1^+(z)X_2^+(z)\left[\Psi_1^+(z) - \Psi_2^+(z) + \frac{P_{\chi-1}(z)}{(z+i)^\chi}\right],$$

$$F^-(z) = X_1^-(z)X_2^-(z)\left[\Psi_1^-(z) - \Psi_2^-(z) + \frac{P_{\chi-1}(z)}{(z+i)^\chi}\right],$$

$$\Omega(z) = X_1^-(z)X_2^-(z)\left[\Psi_1^-(z) - \Psi_2^-(z) + \frac{P_{\chi-1}(z)}{(z-i)^\chi}\right],$$

$$X_1^+(z) = e^{\Gamma_1^+(z)}, X_1^-(z) = \left(\frac{z-z_0}{z-z_1}\right)^{\chi_1} e^{\Gamma_1^-(z)},$$

$$X_2^+(z) = \left(\frac{z-z_0}{z-z_1}\right)^{\chi_2} e^{\Gamma_2^+(z)}, X_2^-(z) = e^{\Gamma_1^-(z)},$$

где

$$\Gamma_1^+(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{i\beta}^{i\beta+\infty} \gamma_1(t)e^{izt}dt,$$

$$\Gamma_1^-(z) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty+i\beta}^{i\beta} \gamma_1(t)e^{izt}dt,$$

$$\gamma_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty+i\beta}^{\infty+i\beta} \ln\left[\left(\frac{t-z_0}{t-z_1}\right)^{-\chi_1} D_1(t)\right] e^{-ixt}dt.$$

При $\chi \le 0$ нужно положить $P_{\chi-1}(z) = 0$; а при $\chi < 0$ дополнительно потребовать выполнение $|\chi|$ условий разрешимости:

$$\int\limits_{L_1} \frac{H_1(t)dt}{X_1^-(t)X_2^+(t)(t-z_0)^k} + \int\limits_{L_2} \frac{H_2(t)dt}{X_1^-(t)X_2^+(t)(t-z_0)^k} = 0.$$

Здесь z_0 – точка в полосе $\alpha < \mathrm{Im} z < \beta$; z_1 и z_2 – точки соответственно в полуплоскостях $\mathrm{Im} z > \beta$, $\mathrm{Im} z < \alpha$;

Аналогичным образом выписываются выражения для $\Gamma_2^\pm(z)$.

1.9. Утверждения из теории аппроксимации

В данном разделе приводится ряд известных фактов из теории приближений, которыми будем пользоваться далее.

Прежде всего напомним некоторые классические результаты конструктивной теории функций. При изложении этих результатов будем следовать монографиям [63, 88, 123, 149].

1.9.1. Полиномы наилучшего приближения

Пусть $f(x)$ – функция, определенная на сегменте $[a,b]$. Обозначим через H_n множество полиномов степени не выше n, т.е. полиномов вида $P_n(x) = a_0 + a_1 x + + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$, а через H_n^T – множество тригонометрических полиномов вида $a_0 + \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx$.

Рассмотрим произвольный полином $P_n(x)$ и положим

$$\Delta(P_n) = \max_{x\in[a,b]} \mid P_n(x) - f(x) \mid .$$

Величина $\Delta(P_n)$ называется отклонением полинома $P_n(x)$ от функции $f(x)$. Если будем изменять полином $P_n(x)$, заставляя его пробегать все множество H_n, то величина $\Delta(P_n)$ также будет изменяться, но так как она остается неотрицательной, то множество ее значений ограничено снизу и имеет точную нижнюю границу

$$E_n = E_n(f) = \inf_{P_n\in H_n} \{\Delta(P_n)\}.$$

Величина $E_n(f)$ называется наименьшим отклонением полиномов из H_n от $f(x)$ или наилучшим приближением к $f(x)$ полиномами из H_n.

Теорема 1.9.1 (теорема Бореля). *Для всякой функции $f(x)\in C[a,b]$ в множестве H_n существует полином $P(x)$, что $\Delta(P)=E_n(f)$.*

Следует отметить, что для всякой функции $f(x) \in C[a,b]$ в множестве H_n существует единственный полином наилучшего приближения. Это утверждение следует из теоремы Бореля и чебышевского альтернанса.

Приведем оценки наилучших приближений к $f(x)$ полиномами из H_n. Вначале рассмотрим формулировки теорем Джексона.

Теорема 1.9.2. *Для любой функции $f(x)\in\tilde{C}_{[0,2\pi]}$ будет справедлива оценка $E_n(f) \le 12\omega\left(\frac{1}{n}\right)$.*

Теорема 1.9.3. *Пусть $f(x)$ – непрерывная 2π-периодическая функция, имеющая непрерывные производные $f'(x)$, $f''(x)$, ..., $f^{(r)}(x)$. Если $\omega_r(\delta)$ – модуль непрерывности r-й производной $f^{(r)}(x)$, то*

$$E_n(f) \le \frac{12^{r+1}\omega_r\left(\frac{1}{n}\right)}{n^r},$$

где $\omega(f,\delta)$ – модуль непрерывности функции f.

Если функция $f(x)$ приближается алгебраическими полиномами, то теоремы Джексона формулируются следующим образом.

Теорема 1.9.4. *Если $f(x) \in C[a,b]$, то $E_n(f) \le 12\omega\left(\frac{b-a}{2n}\right)$.*

Теорема 1.9.5. *Если $f(x) \in C[a,b]$ имеет p непрерывных производных, причем модуль непрерывности p-й производной $f^{(p)}$ есть $\omega_p(\delta)$, то для $n > p$ справедлива оценка*

$$E_n(f) \le \frac{C_p(b-a)^p}{n^p}\omega_p\left(\frac{b-a}{2(n-p)}\right),$$

где C_p зависит только от p.

Теорема 1.9.6. [88] *Для любой функции $f \in \tilde{C}_{[0,2\pi]}, f \not\equiv const$ справедливы неравенства $E_n(f) < \omega(f, \frac{\pi}{n}), n = 1, 2, \ldots,$ причем не зависящая от $f(x)$ и от n константа 1 перед $\omega(f, \frac{\pi}{n})$ не может быть уменьшена.*

1.9.2. Интерполяционные полиномы

Пусть функция $f(x) \in C[a,b]$ задана на сегменте $[a,b]$ своими значениями в точках $x_i, i = 1, 2, \ldots, n$. Интерполяционный полином Лагранжа имеет вид

$$P_n(f,[a,b]) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)l_k(x),$$

где $l_k(x)-$ фундаментальные полиномы:

$$l_k(x) = \frac{(x-x_1)\ldots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\ldots(x-x_n)}{(x_k-x_1)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_n)}.$$

Ниже, в различных конкретных случаях, используются различные сетки узлов. Это обстоятельство будет каждый раз специально оговариваться.

Общим является следующее утверждение.

Теорема 1.9.7. *Пусть* $f(x)\in C[a,b]$ *задана на сегменте* $[a,b]$ *своими значениями в точках* $x_i, i=1,2,\ldots,n$. *Справедлива оценка*

$$\|f(x)-P_n(f,[a,b]\|\le E_{n-1}(f)(1+\lambda_n),$$

где λ_n *– константа Лебега* [123].

Пусть $x_1,\ldots,x_n$ – система узлов на сегменте $[a,b]$. Обозначим через $P_n(x)$ полином степени $(n-1)$, интерполирующий функцию $f(x)$ по узлам $x_k, k=1,2,\ldots,n$. Пусть $\omega(x)=(x-x_1)\ldots(x-x_n)$.

Теорема 1.9.8. [112, стр. 47] *Если* $f(x)$ *имеет на* $[a,b]$ *непрерывную производную порядка* $n+1$, *то внутри* $[a,b]$ *существует такая точка* ζ, *что имеет место равенство* $f(\zeta)-P_n(\zeta)=\frac{\omega(\zeta)}{(n+1)!}f^{n+1}(\zeta)$.

При аппроксимации периодических (с периодом 2π) функций будем использовать интерполяционный полином

$$T_n(f)=\sum_{k=0}^{2n} f\left(\frac{2k\pi}{2n+1}\right)\psi_k(x),\ \text{где}\ \psi_k(x)=\frac{1}{2n+1}\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(x-x_k)}{\sin\frac{x-x_k}{2}}.$$

Приведем следующие известные оценки точности аппроксимации функций тригонометрическими полиномами, которыми будем ниже пользоваться.

Обозначим через $T_r(x)$ полином Чебышева степени r, наименее уклоняющийся от нуля в равномерной метрике на сегменте $[-1,1]$, а через $x_1,\ldots,x_r$ – его корни. Через $L_r(x,[-1,1])$ обозначим полином, интерполирующий функцию $f(x)$ на сегменте $[-1,1]$ по узлам $x_1,\ldots,x_r$.

Теорема 1.9.9. [63] *Справедлива оценка погрешности интерполяционной формулы* $L_r(x,[-1,1])$

$$\|f(x)-L_r(x,[-1,1])\|\le\|f^{(r)}\|/r!2^{r-1}.$$

Аналогичные утверждения имеют место и при интерполяции функций по узлам других ортогональных многочленов. В частности, нам понадобится оценка точности интерполирования функций из класса $W^r(M)$ по узлам полиномов Лежандра.

Обозначим через $\tilde{P}_n(x)$ полином Лежандра

$$\tilde{P}_n(x)=\frac{n!}{(2n)!}\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}$$

со старшим коэффициентом, равным 1. Обозначим узлы полинома Лежандра через x_k, $k=1,2,\ldots,n$, , а через $P_n(x,[-1,1])$ – интерполяционный полином Лагранжа, построенный по этим узлам.

Теорема 1.9.10. *Справедлива оценка погрешности интерполяционной формулы $P_n(x,[-1,1])$ по узлам полинома Лежандра*

$$\|f(x)-P_n(x,[-1,1])\| \le \frac{\|f^{(n)}(x)\|}{(2n)!}.$$

1.9.3. Факты из теории квадратурных формул

В книге используется ряд известных утверждений из теории квадратурных формул. Для удобства читателя некоторые из них приводятся в этом разделе.

Пусть $x_1,\dots,x_n$ – система узлов, расположенных на сегменте $[a,b]$. Обозначим через $L_n(x)$ полином степени $(n-1)$, интерполирующий функцию $f(x)\in W^n(M_n)$ по узлам $x_k, k=1,2,\dots,n$. Пусть $\omega(x)=(x-x_1)\dots(x-x_n)$. Квадратурная формула интерполяционного типа по узлам x_k вводится формулой

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b L_n(x)dx + \frac{1}{n!}\int_a^b f^{(n)}(\xi)\omega(x)dx, \qquad (1.9.1)$$

где $\int_a^b L_n(x)dx = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k)$ – квадратурная формула, $a<\xi<b$.

Погрешность этой формулы оценивается неравенством

$$|R_n| \le \frac{M_n}{n!}\int_a^b |\omega(x)|dx,$$

где $M_n = \max\limits_{a\le x\le b}|f^{(n)}(x)|$.

При $n=2$ имеем формулу трапеций, при $n=3$ – формулу Симпсона.

В случае, если число производных функции $f(x)$ меньше числа n используемых узлов, погрешность квадратурной формулы интерполяционного типа

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b L_n(f,x)dx + R_n$$

оценивается неравенством

$$|R_n| \le \int_a^b |f(x) - L_n(f,x)|dx \le$$
$$\le \int_a^b |f(x) + T_{n-1}(f)|dx + \int_a^b |L_n\left([T_{n-1}(f) - f(x)\right], x)\,|dx \le$$
$$\le (b-a)(E_{n-1}(f) + \max_{a\le x\le b} |L_n\left([T_{n-1}(f) - f(x)], x\right)|\Big) \le$$
$$\le (b-a)(E_n(f) + E_{n-1}(f)\lambda_n) \le (b-a)E_{n-1}(f)(\lambda_n + 1),$$

где $T_{n-1}(f)$ – полином наилучшего равномерного приближения степени $(n-1)$ функции $f(x)$ на сегменте $[a,b]$, $E_n = \max\limits_{a\le x\le b} |f(x) - T_{n-1}|$ – наилучшее приближение функции $f(x)$ полиномами степени не выше $(n-1)$ на сегменте $[a,b]$; λ_n – константа Лебега интерполирования по узлам x_k, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Теорема 1.9.11. [126] *Среди квадратурных формул вида*

$$\int_0^1 f(x)dx = \sum_{k=1}^m p_k f(x_k) + R(f)$$

наилучшей для класса $\tilde{W}^r L_p(1) \quad (1 \le p \le \infty)$ *является формула прямоугольников*

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^m f\left(\frac{k}{m}\right) + R(f);$$

при этом

$$R_m[\tilde{W}^r L_p(1)] = \frac{1}{m^r}\inf_c \|B_r^*(\cdot) - c\|_{L_q} \quad (1/p + 1/q = 1).$$

Для $1 < p \le \infty$ *наилучшая формула единственная с точностью до жесткого сдвига.*

Здесь $B_r^*(t)(-1 \le t \le 1)$ *– полиномы Бернулли.*

1.10. Устойчивые методы вычисления производных

1.10.1. Приближенные методы вычисления производных первого порядка

В данном разделе приводятся алгоритмы разложения функции $f(t)$ по степеням t и вычисления производных n-го порядка.

Вычисление производных высокого порядка разностными методами нецелесообразно из-за некорректности операции дифференцирования.

Более предпочтительными являются следующие алгоритмы.

Пусть функция $f(t)$ определена на сегменте $[0, T]$. Найдем полином $T_M(t)$ степени M, который аппроксимирует функцию $f(t)$ на сегменте $[0, T]$. Для этого приравняем в $M + 1$ равностоящей точке $t_k = \frac{kT}{M+1}$, $k = 0, \dots M$, значения функции $f(t)$ и полинома $T_M(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_M t^M$.

В результате получаем систему из $M + 1$ уравнения:

$$\sum_{k=0}^{M} a_k t_m^k = f(t_m), m = 0, \dots, M,$$

с определителем Вандермонда, из которой однозначно определяются коэффициенты $a_k (k = 0, 1, \dots, M)$. Тогда значения производных полинома $T_M(t)$ являются приближенными к значениям производных функции $f(t)$.

Ниже предлагается несколько алгоритмов, эффективных при вычислении производных функций одной и нескольких переменных.

Одним из таких методов является метод дифференцирования с помощью интегрирования, описанный в книге [116, с. 330]. Этот метод основан на применении формулы

$$f'(x) \approx \frac{3}{2h^3} \int_{-h}^{h} t f(x + t) dt, \tag{1.10.1}$$

где h – достаточно малая величина.

Если функция $f(t)$ имеет производные до третьего порядка, то разлагая функцию $f(x + t)$ по степеням t по формуле Тейлора, имеем

$$\frac{3}{2h^3} \int_{-h}^{h} t f(x + t) dt = f'(x) + \frac{1}{10} h^2 f'''(\xi),\ x < h < \xi < x + h.$$

Формула (1.10.1) позволяет вычислять производную и в случае, когда функция $f(t)$ задана с недифференцируемой погрешностью. Нетрудно оценить величину погрешности и в этом случае. Пусть $f(t) = f^*(t) + \varepsilon(t)$, где $f^*(t)$ – точное задание функции, а

$\varepsilon(t)$ – недифференцируемая функция, не превосходящая по модулю константы ε ($\max|\varepsilon(t)| < \varepsilon$). Тогда

$$f'(x) \approx \frac{3}{2h^3}\int\limits_{-h}^{h} tf(x+t)dt = \frac{3}{2h^3}\int\limits_{-h}^{h} tf^*(x+t)dt +$$

$$+\frac{3}{2h^3}\int\limits_{-h}^{h} t\varepsilon(x+t)dt = (f^*)'(x) + \frac{1}{10}h^2(f^*)'''(\xi) + \frac{3}{2h^3}\int\limits_{-h}^{h} t\varepsilon(x+t)dt.$$

Замена производной точно заданной функции $f^*(x)$ выражением $\frac{3}{2h^3}\int\limits_{-h}^{h} tf(x+t)dt$, в котором фигурирует неточно заданная функция $f(t)$, дает погрешность $\frac{h^2}{10}(f^*)'''(\xi) + \frac{3\varepsilon}{2h}$. Выбирая значение h, минимизирующее последнюю сумму в зависимости от значений $(f^*)'''(\xi)$ и ε (если они известны), получаем достаточно эффективный алгоритм вычисления производных.

Отметим, что для вычисления производных в ряде случаев может оказаться полезной вычислительная схема, которая использует все измеренные значения $f(t)$. При ее построении применим формулы Сохоцкого (1.7.4) для сингулярных интегралов с ядром Коши. Рассмотрим сегмент $[a,b]$ и введем узлы $t_k = a + \frac{b-a}{N}k$, $k = 0,1,2,\cdots,N$, $\bar{t}_k = t_k + \frac{b-a}{2N}$, $k = 0,1,2,\ldots,N-1$. Рассмотрим квадратурную формулу [22, 24]:

$$f^{(r)}(t) = \frac{r!}{2\pi i}\sum_{k=0}^{N-1} f(\bar{t}_k)\times$$

$$\times\left[\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{d\tau}{(\tau-(t+ih))^{r+1}} - \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{d\tau}{(\tau-(t-ih))^{r+1}}\right] + R_N(f). \quad (1.10.2)$$

Вычислительная схема (1.10.2) позволяет вычислять производные любого конечного порядка и имеет достаточно высокую точность и устойчивость. Параметром регуляризации в схеме (1.10.2) является h. Зависимость точности и устойчивости от параметра h исследована в [24], где предложены и другие численные методы вычисления производных, часть которых имеют большую точность, но меньшую устойчивость.

1.10.2. Приближенное вычисление производных высоких порядков

Рассмотрим еще один устойчивый метод вычисления производных, основанный на применении квадратурных формул вычисления сингулярных интегралов [12, 21, 22]. Функция $x^{(n)}(t)$ может быть представлена в виде

$$x^{(n)}(t) = \frac{n!}{2\pi i} \lim_{\eta \to 0} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)d\tau}{(\tau - t + i\eta)^{n+1}} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)d\tau}{(\tau - t - i\eta)^{n+1}} \right].$$

Обозначим через $H_1(A, K)$ класс функции $\varphi(t)$, $t \in (-\infty, \infty)$, удовлетворяющих условиям $|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| \le A|t_1 - t_2|$, $|\varphi(0)| \le K$.

Через $W^r(A, K)$ обозначим класс функций $\varphi(t)$, $t \in (-\infty, \infty)$, имеющих непрерывные производные до $(r-1)$-го порядка, удовлетворяющие условиям

$$\max(|\varphi(t)|, |\varphi'(t)|, \ldots, |\varphi^{(r-1)}(t)|) \le K,$$

и кусочно-непрерывную производную r-го порядка, удовлетворяющую неравенству

$$\max |\varphi^{(r)}(t)| \le 1.$$

Функция $\varphi(t) \in H_{1\rho}(A, K)$, $\varphi(t) \in W^r_\rho(A, K)$, если $\varphi(t) = \rho(t)\psi(t)$, где $\rho(t)$ – весовая функция, $\psi(t) \in H_1(A, K)$, $\psi(t) \in W^r(A, K)$.

В качестве весовых использованы функции

$$\rho_1(t) = a^{|t|},\ \rho_2(t) = e^{-t^2},\ \rho_3(t) = 1/(1 + t^2).$$

Введем обозначения:

N – целое число, $t^i_{k,l} = k + l/N^i_k$, $k = -A_i, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, A_i - 1; l = 0, 1, \ldots, N^i_k$, $i = 1, 2, 3$,

$A_1 = [\log_a N]$, $A_2 = [\sqrt{\ln N}]$, $A_3 = [(N/\ln N)^{1/(2\alpha+1)}]$;

$N^1_k = [N/a^k]$, $N^2_k = [N/e^{k^2}]$ при $k \ge 0$;

$N^1_k = [N/a^{|k|-1}]$, $N^2_k = [N/e^{(|k|-1)^2}]$ при $k < 0$;

$N^3_k = [N/k^{2\alpha-1}]$ при $k \ne 0$, $N^3_0 = N$, $\bar{t}_{k,l} = (t_{k,l} + t_{k,l+1})/2$.

Здесь $[a]-$ антье a.

Пусть $t \in [t_{i,j}, t_{i,j+1}]$. Вычисление функции $x^{(n)}(t)$ будем проводить по формуле

$$x^{(n)}(t) = -\frac{(n-1)!}{2\pi i} \sum_{k=-A_v}^{A_v-1} \sum_{l=0}^{N_k-1} x(t^v_{k,l}) \left[\frac{1}{(t^v_{k,l+1} - (\bar{t}^v_{i,j} + ih))^n} - \right.$$

$$-\frac{1}{(t^v_{k,l+1}-(\bar t^v_{i,j}-ih))^n}-\frac{1}{(t^v_{k,l}-(\bar t^v_{i,j}+ih))^n}-$$

$$-\frac{1}{(t^v_{k,l}-(\bar t^v_{i,j}-ih))^n}\Bigg]+R_n(x),\ v=1,2,3,\ n=1,2,\ldots,r, \quad (1.10.3)$$

в которой параметр h выбирается из условий, определенных ниже. Можно показать, что если функция $x(t)\in W^r_\rho H_\alpha(A,K)$ и задана с погрешностью ε ($|x(t)-\bar x(t)|\le\varepsilon$), то погрешность квадратурной формулы (1.10.3) при $h=N^{-\alpha/(n+1)}$ будет $|R_N(x)|\le C(N^{-\alpha/(n+1)}+\varepsilon N^{r/(n+1)})$.

В случае, если необходимо вычислять значения функции на сегменте $[a,b]$, то нет необходимости в интегрировании по бесконечному контуру. Предположим, что вычисляются значения $x^{(n)}$ при $t\in[0,1]$. Введем обозначения: $t_l=l/N,\ l=0,1,\ldots,N,\ \bar t_l=(t_l+t_{l+1})/2$. Пусть $t\in[t_j,t_{j+1}]$. Вычисления $x(t)$ будем проводить по формуле

$$x^{(n)}(t)=\frac{n!}{2\pi i}\sum_{l=0}^{N-1}x(\bar t_l)\left[\int_{t_l}^{t_{l+1}}\frac{d\tau}{(\tau-\bar t_j+ih)^{n+1}}-\int_{t_l}^{t_{l+1}}\frac{d\tau}{(\tau-\bar t_j-ih)^{n+1}}\right]+$$

$$+R_N(x),\ n=1,2,\ldots,r. \quad (1.10.4)$$

Если функция $x(t)\in W^rH_\alpha$, $r=1,2,\ldots$, $0<\alpha\le1$, задана на сегменте $[0,1]$ значениями $\tilde x(t_l)$, определенными с точностью до ε, $|\tilde x(t_l)-x(\bar t_l)|\le\varepsilon$, то при $h=N^{-1/(l-1)}$ погрешность формулы (1.10.4) оценивается неравенством $|R_N(x)|\le C(N^{-1/(n+1)}+\varepsilon N^{r/(n+1)})$.

Обозначим через $P_n(x,\Delta)$ интерполяционный полином степени n, построенный по $n+1$ узлам полиномов Чебышева первого рода, отображенным с сегмента $[-1,1]$ на сегмент Δ. Обозначим через Δ_k сегменты $\Delta_k=[t_k,t_{k+1}]$, $t_k=k/N$, $k=0,1,\ldots,N$.

Пусть $t\in\Delta_j$. Функцию $x^{(n)}(t)$ будем вычислять по формуле

$$x^{(n)}(t)=\frac{n!}{2\pi i}\sum_{l=0}^{N-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}}P_n(\tilde x,\Delta_k)\left[\frac{1}{(\tau-t+ih)^{n+1}}-\frac{1}{(\tau-t-ih)^{n+1}}\right]d\tau+$$

$$+R_N(x), \quad (1.10.5)$$

где $\tilde x(t)$ – функция, аппроксимирующая $x(t)\in W^rH_\alpha\,(r\le n)$ с точностью ε, $h=N^{-r/(n+1)}$. Погрешность формулы (1.10.5) равна

$$C(h+\varepsilon(h^n+(1/N^n)h^n))=C(N^{-r/(n+1)}+\varepsilon N^{-nr/(n+1)}).$$

Обоснование этих и подобных методов приведено в работе [21].

В случае функций многих переменных для построения алгоритмов вычисления частных производных можно использовать полигиперсингулярные интегралы. Определение гиперсингулярных и полисингулярных интегралов дано в работе [22]. Ниже ограничимся рассмотрением бигиперсингулярных интегралов. Известно следующее обобщение формулы Сохоцкого – Племеля [58]:

$$\frac{\partial^{n_1+n_2}\varphi(t_1,t_2)}{\partial t_1^{n_1}\partial t_2^{n_2}} =$$

$$= \Phi^{++}(t_1,t_2) - \Phi^{+-}(t_1,t_2) - \Phi^{-+}(t_1,t_2) + \Phi^{--}(t_1,t_2), \qquad (1.10.6)$$

где

$$\Phi^{++}(t_1,t_2) = \lim_{\eta_1\to 0,\eta_2\to 0}\int\limits_L \frac{(\partial^{n_1+n_2}\varphi(\tau_1,\tau_2)/\partial\tau_1^{n_1}\partial\tau_2^{n_2})\,d\tau_1\,d\tau_2}{\big[\tau_1-(t_1-\bar{n}_1\eta_1)\big]\big[\tau_2-(t_2-\bar{n}_2\eta_2)\big]},$$

$$\Phi^{+-}(t_1,t_2) = \lim_{\eta_1\to 0,\eta_2\to 0}\int\limits_L \frac{(\partial^{n_1+n_2}\varphi(\tau_1,\tau_2)/\partial\tau_1^{n_1}\partial\tau_2^{n_2})\,d\tau_1\,d\tau_2}{\big[\tau_1-(t_1-\bar{n}_1\eta_1)\big]\big[\tau_2-(t_2+\bar{n}_2\eta_2)\big]},$$

$$\Phi^{-+}(t_1,t_2) = \lim_{\eta_1\to 0,\eta_2\to 0}\int\limits_L \frac{(\partial^{n_1+n_2}\varphi(\tau_1,\tau_2)/\partial\tau_1^{n_1}\partial\tau_2^{n_2})\,d\tau_1\,d\tau_2}{\big[\tau_1-(t_1+\bar{n}_1\eta_1)\big]\big[\tau_2-(t_2-\bar{n}_2\eta_2)\big]},$$

$$\Phi^{--}(t_1,t_2) = \lim_{\eta_1\to 0,\eta_2\to 0}\int\limits_L \frac{(\partial^{n_1+n_2}\varphi(\tau_1,\tau_2)/\partial\tau_1^{n_1}\partial\tau_2^{n_2})\,d\tau_1\,d\tau_2}{\big[\tau_1-(t_1+\bar{n}_1\eta_1)\big]\big[\tau_2-(t_2+\bar{n}_2\eta_2)\big]},$$

$L = L_1 \times L_2$, где L_1, L_2 – замкнутые контуры.

Положим, что L_1, L_2 – действительные оси координат в плоскостях комплексных переменных z_1, z_2. Предположим, что функция $\varphi(t_1,t_2)$ и ее частные производные $\frac{\partial^{v_1+v_2}\varphi(t_1,t_2)}{\partial t_1^{v_1}\partial t_2^{v_2}}$, v_i=0, 1, …, n_i, i=1, 2, стремятся к нулю при $t_i \to \pm\infty$.

Интегрируя по частям интегралы в последних четырех формулах, имеем

$$\Phi^{++}(t_1,t_2) = (-1)^{n_1+n_2}n_1!n_2!\times$$
$$\times \lim_{\eta_1\to 0,\eta_2\to 0}\int\limits_L \frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2}{\big[\tau_1-(t_1-\bar{n}_1\eta_1)\big]^{n_1+1}\big[\tau_2-(t_2-\bar{n}_2\eta_2)\big]^{n_2+1}},$$

$$\Phi^{+}(t_1,t_2) = (-1)^{n_1+n_2}n_1!n_2!\times$$
$$\times \lim_{\eta_1\to 0,\eta_2\to 0}\int\limits_L \frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2}{\big[\tau_1-(t_1-\bar{n}_1\eta_1)\big]^{n_1+1}\big[\tau_2-(t_2+\bar{n}_2\eta_2)\big]^{n_2+1}},$$

$$\Phi^{-+}(t_1,t_2)=(-1)^{n_1+n_2}n_1!n_2!\times$$
$$\times\lim_{\eta_1\to 0,\eta_2\to 0}\int\limits_L\frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2}{\big[\tau_1-(t_1+\bar{n}_1\eta_1)\big]^{n_1+1}\big[\tau_2-(t_2-\bar{n}_2\eta_2)\big]^{n_2+1}},$$
$$\Phi^{--}(t_1,t_2)=(-1)^{n_1+n_2}n_1!n_2!\times$$
$$\times\lim_{\eta_1\to 0,\eta_2\to 0}\int\limits_L\frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2}{\big[\tau_1-(t_1+\bar{n}_1\eta_1)\big]^{n_1+1}\big[\tau_2-(t_2+\bar{n}_2\eta_2)\big]^{n_2+1}}.$$

Аппроксимируя интегралы в правых частях последних четырех формул кубатурными формулами вычисления гиперсингулярных интегралов [24], получаем устойчивый алгоритм вычисления частных производных высоких порядков.

Глава 2

Методы восстановления импульсной переходной функции линейных систем

2.1. Обзор методов

Приведем обзор методов идентификации линейных систем, описываемых уравнениями вида

$$Kx \equiv \int_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau)x(\tau)d\tau = f(t), \tag{2.1.1}$$

где x и f – входной и выходной сигналы; $g(t)$ – импульсная переходная функция.

Так как $g(t) = 0$ при $t \leq 0$, а входной сигнал подается в момент времени $t = 0$, то уравнение (2.1.1) можно записать в виде

$$Kx \equiv \int_{0}^{t} g(t-\tau)x(\tau)d\tau = f(t). \tag{2.1.2}$$

Применение теоремы о свертке дает возможность представить уравнение (2.1.2) в виде

$$Kx \equiv \int_{0}^{t} x(t-\tau)g(\tau)d\tau = f(t). \tag{2.1.3}$$

Из сопоставления уравнений (2.1.2) и (2.1.3) следует, что методы, разработанные для восстановления входных сигналов, непосредственно применимы к определению импульсной переходной функции $g(t)$. Обзор методов восстановления входных сигналов будет приведен в разд. 5.1 настоящей работы.

Как отмечено в монографии [71], методы определения импульсной переходной функции можно разделить на детерминированные и стохастические.

Детерминированные методы, в свою очередь, подразделяются на следующие группы:

а) методы, основанные на применении δ-функции или δ-образных функций;

б) методы, основанные на аналитическом или численном решении уравнений (2.1.1) и (2.1.2).

Стохастические методы (в первую очередь корреляционные) основаны на решении уравнения Винера – Хопфа

$$R_{yx} = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) R_{xx}(t-\tau) d\tau, \qquad (2.1.4)$$

где R_{xx} и R_{yx} – корреляционная и взаимно корреляционная функции.

Методы решения уравнений Винера – Хопфа подробно изложены в книгах [59, 65]. Кроме того, отметим, что изложенные в гл. 5 настоящей работы итерационные методы восстановления сигналов напосредственно применимы к решению уравнения (2.1.4).

После этих замечаний перейдем к краткому обзору детерминированных методов.

Большое число методов основано на том известном факте, что ИПФ является выходной функцией устройства при подаче на ее вход δ-функции. Так как физически реализовать δ-функцию невозможно, то вместо нее используются δ-образные функции. Подробный обзор результатов по применению δ-функции к идентификации параметров динамических систем имеется в [68, 71, 113, 162, 167, 168].

Отметим, что при замене δ-функции δ-образными функциями возникает погрешность, величина которой зависит как от вида ИПФ, так и от вида δ-образной последовательности.

В работе [116] предложен метод, позволяющий восстановить ИПФ по реакции устройства на входной сигнал в виде δ-образной или вообще произвольной функции, разложение которой в ряд Фурье содержит все гармоники с номерами до N включительно, где N – достаточно большое положительное число. Теоретически по этому методу ИПФ представляется в виде бесконечного сходящего ряда.

Другой метод восстановления импульсной переходной функции, основанный на замене δ-функции на δ-образную функцию, из-

ложен в статье [113] в формулировке задачи восстановления входных сигналов.

Большую группу методов определения импульсной переходной функции составляют методы, основанные на применении интегральных преобразований (в частности, Фурье или Лапласа) к уравнениям в свертках (2.1.1) и (2.1.2). Подробное изложение этих методов содержится в работах [59, 71, 73, 170].

Кроме аналитических методов для определения ИПФ широко используются численные методы. Здесь необходимо выделить ряд направлений. Во-первых, направление, основанное на применении метода регуляризации к приближенному решению уравнений Винера – Хопфа [170]; во-вторых, проекционные методы решения уравнений Винера – Хопфа [65, 79]; в-третьих, специальный метод решений уравнений в свертках, изложенный в монографии [59].

Кроме того, отметим работы [13, 66], в которых ИПФ определяется по реакции устройства на подачу на вход двух сигналов.

2.2. Определение временных характеристик линейных систем по двум тестовым сигналам

2.2.1. Непрерывные системы

Известно [71], что инвариантные к сдвигу линейные системы описываются уравнениями вида

$$Kx \equiv \int_0^t g(t-\tau)x(\tau)d\tau = f(t), \qquad (2.2.1)$$

где $x(t)$ и $f(t)$ – соответственно входной и выходной сигналы; $g(t)$ – импульсная переходная функция.

В работе [66] предложен метод определения импульсной характеристики $g(t)$ по двум финитным сигналам.

Пусть на сегменте $[0, 2T]$ определены два входных сигнала:

$$x_1(t) = \sin[a(t-T)^2 + b(t-T)],\ 0 \le t \le 2T,$$
$$x_2(t) = \cos[a(t-T)^2 + b(t-T)],\ 0 \le t \le 2T.$$

Через $f_1(t)$ и $f_2(t)$ обозначается реакция устройства на входные сигналы $x_1(t)$ и $x_2(t)$ соответственно.

Вводится функция

$$H(t,T)=\frac{a}{\pi}\int\limits_0^{2T}x_1(\xi-t)f_1(\xi)d\xi+\frac{a}{\pi}\int\limits_0^{2T}x_2(\xi-t)f_2(\xi)d\xi,\ 0\le t\le A.$$

Система Kx называется правильной, если

$$|g(t)|\le c_1e^{-Mt},\ |g^{'}(t)|\le c_2e^{-vt},\ \ c_1,c_2,M,v=\text{const}.$$

Доказано следующее утверждение.

Теорема 2.2.1. [66] *Пусть линейная автономная система экспоненциально устойчива и правильна. Тогда для импульсной характеристики $g(t)$ системы Kx при каждом фиксированном t справедливо равенство*

$$\lim_{T\to\infty}\max|g(t)-H(t,T)|=0.$$

Доказательство. Доказательство основано на следующем факте: если преобразование Фурье $X(\omega)$ входного сигнала $x(t)$ имеет вид $X(\omega)=\rho e^{i\eta(\omega)}$, то для любой финитной (или быстро убывающей на бесконечности) функции $g(t)$ справедливо равенство

$$g(t)=\frac{1}{\rho^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\overline{f}(\xi-t)\int\limits_{-\infty}^{\infty}g(\xi-s)f(s)dsd\xi,$$

где $\overline{f}(t)$ – комплексно сопряженная к $f(t)$ функция.

Для проверки приведенного равенства достаточно применить к нему преобразование Фурье и использовать известную формулу $V(\overline{f}(t))=\overline{F(-\omega)}$, где $V(f)$ – оператор преобразования Фурье функции $f(t)$, $F(\omega)$ – преобразование функции $f(t)$.

Рассмотрим, следуя работе [13], способ определения импульсной переходной функции по двум сигналам.

Предположим, что входной и выходной сигналы финитны с носителем $[0,T]$ (при реальных испытаниях сигналы удовлетворяют этому условию). Тогда уравнение (2.2.1) представимо в виде

$$\int\limits_0^T g(t-\tau)x(\tau)d\tau=f(t),\ t\ge0. \qquad (2.2.2)$$

Так как в силу физической реализуемости $g(t) = 0$ при $t < 0$, то при финитных входном $x(t)$ и выходном $f(t)$ сигналах с носителем $[0, T]$ поведение динамической системы характеризуется информацией об импульсной переходной функции $g(t)$ при $0 \le t \le T$.

Поэтому для определения значений $g(t)$ при $0 \le t \le T$ вместо уравнения (2.2.2) можно ограничиться рассмотрением уравнения

$$\int_0^T g(t-\tau)x(\tau)d\tau = f(t), 0 \le t \le T. \tag{2.2.3}$$

Уравнение (2.2.3) можно представить в эквивалентной форме

$$Kx \equiv \frac{d}{dt}\int_0^T h(t-\tau)x(\tau)d\tau = f(t), \tag{2.2.4}$$

где $g(t) = \frac{d}{dt}h(t)$, $h(t)$ - переходная функция системы.

Введем, следуя [147], операторы

$$A_0 f = \int_0^t f(\tau)d\tau \text{ и } A_0^* f = -\int_t^T f(\tau)d\tau,$$

где f – произвольный элемент пространства $L_2[0, T]$ функций, суммируемых с квадратом.

В работе [147] показано, что для любого ограниченного оператора $L\varphi = \dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_0^T s(t-\tau)\varphi(\tau)d\tau$ с разностным ядром имеет место равенство

$$(iA_0L - L(iA_0^*))\varphi = i\int_0^T \varphi(\tau)[M(t) + N(\tau)]d\tau, \tag{2.2.5}$$

где $M(t) = s(t),\ N(t) = -s(-t),\ 0 \le t \le T,\ \varphi(t)$ – произвольная функция из пространства $L_2[0, T]$.

Применим тождество (2.2.5) к оператору Kx, определяющему согласно уравнению (2.2.4) линейное средство измерения.

Нетрудно видеть, что

$$h(t) - \int_0^T x(\tau)d\tau = A_0Kx - KA_0^*x + \int_0^T x(\tau)h(-\tau)d\tau.$$

Так как $h(-\tau)=0$ при $\tau \geq 0$, то $\int\limits_0^T x(\tau)h(-\tau)d\tau = 0$. Учитывая, что $Kx=f$, и предполагая, что $\int\limits_0^T x(\tau)d\tau \neq 0$, имеем

$$h(t) = \frac{1}{\int\limits_0^T x(\tau)d\tau}\left[\int\limits_0^t f(\tau)d\tau + f_1(t)\right]. \qquad (2.2.6)$$

Здесь $f_1(t)$ – выходной сигнал средства измерения при подаче на его вход сигнала

$$x_1(t) = \int\limits_t^T x(\tau)d\tau.$$

После определения переходной характеристики $h(t)$ легко определяется импульсная переходная характеристика

$$g(t) = (f(t) + \frac{d}{dt}f_1(t))/\int\limits_0^T x(\tau)d\tau. \qquad (2.2.7)$$

Таким образом, располагая реакцией средства измерения на входные сигналы $x(t)$ и $x_1(t) = \int\limits_t^T x(\tau)d\tau$, легко вычислить динамические характеристики этого средства измерения.

При этом необходимо отметить, что операция вычисления производной является некорректной и при ее практической реализации необходимо использовать регуляризующие алгоритмы [170].

Ряд регуляризующих алгоритмов, эффективно применяемых в задачах идентификации, изложен в разд. 1.10 и работах [3, 23, 38].

Пример 2.2.1. Рассмотрим линейную систему, функционирование которой описывается уравнением (2.2.1). Пусть входным $x(t)$ и выходным $y(t)$ сигналами являются функции

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq t \leq 1, \\ 0 & \text{при } t \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty), \end{cases} \qquad (2.2.8)$$

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \leq 0, \\ t^2 & \text{при } 0 \leq t \leq 1, \\ t^2 - (t-1)^2 & \text{при } t \geq 1. \end{cases} \qquad (2.2.9)$$

Требуется определить переходную характеритику $h(t)$ системы (2.2.1).

Отметим, что при входном (2.2.8) и выходном (2.2.9) сигналах точное значение переходной характеристике $h(t)$ имеетт вид

$$h(t) = \begin{cases} t^2 & \text{при } t \geq 0, \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases} \tag{2.2.10}$$

Решение. По данным значениям $x(t)$ и $f(t)$ определим переходную характеристику $h(t)$. При $0 \leq t \leq 1$, $f(t) = t^2$, $x_1(t) = 1 - t$,

$$f_1(t) = \frac{d}{dt} \int_0^1 h(t-\tau)(1-\tau)d\tau = t^2 - \frac{t^3}{3}.$$

Следовательно, $h(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau + f_1(t) = t^2$, что совпадает с точным выражением (2.2.10).

Приведем, следуя [42], другое доказательство формул (2.2.6) и (2.2.7).

Пусть на вход линейной системы, описываемой уравнением (2.2.1), поступают два сигнала $x_1(t)$ и $x_2(t) = \int_t^\infty x_1(\tau)d\tau$. Им соответствуют выходные сигналы:

$$f_1(t) = \int_0^t g(t-\tau)x_1(\tau)d\tau \tag{2.2.11}$$

и

$$f_2(t) = \int_0^t g(t-\tau)\left(\int_\tau^\infty x_1(\nu)d\nu\right)d\tau. \tag{2.2.12}$$

Применяя к выражениям (2.2.11) и (2.2.12) преобразование Лапласа, получаем

$$F_1(p) = G(p)X_1(p),$$

$$F_2(p) = L\left\{\int_0^t g(t-\tau)\left[\int_0^\infty x_1(\nu)d\nu - \int_0^\tau x_1(\nu)d\nu\right]d\tau\right\} =$$

$$= L\left\{\int_0^\infty x_1(\nu)d\nu \int_0^t g(t-\tau)d\tau - \int_0^t g(t-\tau)\left(\int_0^\tau x_1(\nu)d\nu\right)d\tau\right\} =$$

$$= \int_0^\infty x_1(\nu)d\nu \frac{G(p)}{p} - \frac{G(p)X_1(p)}{p},$$

далее

$$pF_2(p) = G(p) \int_0^\infty x_1(\nu)d\nu - G(p)X_1(p),$$

$$G(p) \int_0^\infty x_1(\nu)d\nu = F_1(p) + F_2(p)p.$$

Из последнего выражения имеем

$$G(p) = \frac{F_1(p) + pF_2(p)}{\int_0^\infty x_1(\nu)d\nu} \tag{2.2.13}$$

и, следовательно,

$$g(t) = \frac{f_1(t) + f_2'(t)}{\int_0^\infty x_1(\nu)d\nu}, \ f_2(0) = 0. \tag{2.2.14}$$

Из связи $g(t)$ и $h(t)$ следует, что

$$h(t) = \frac{\int_0^t f_1(\tau)d\tau + f_2(t)}{\int_0^\infty x_1(\nu)d\nu}. \tag{2.2.15}$$

Таким образом, с помощью преобразования Лапласа получены формулы (2.2.14), (2.2.15), совпадающие с формулами (2.2.6), (2.2.7), полученными на основе теории уравнений с разностными ядрами. Отметим, что применение как теории уравнений с разностными ядрами, так и различных преобразований, позволяет расширить круг задач, к которым применимы методы идентификации по двум тестовым сигналам.

2.2.2. Определение разностных ядер интегральных уравнений

Изложенный в разд. 2.2.1 метод позволяет по двум тестовым сигналам определить разностное ядро интегрального уравнения с

постоянными пределами интегрирования. Учитывая, что к таким уравнениям сводится [73] ряд задач математической физики, предложенный алгоритм оказывается полезным для восстановления коэффициентов уравнений в частных производных по двум тестовым сигналам.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{d}{dt}\int\limits_0^{\omega} h(t-\tau)x(\tau)d\tau = f(t), \tag{2.2.16}$$

где $x(t)$ – входной, а $f(t)$ – выходной сигналы.

Круг задач, представимых этим уравнением, описан в работе [59]. Будем считать, что функция $h(t)$ дифференцируема, тогда при ряде дополнительных условий на функцию $h(t)$ [174] имеем

$$\frac{d}{dt}\int\limits_0^{\omega} h(t-\tau)x(\tau)d\tau = \int\limits_0^{\omega} \frac{d}{dt}h(t-\tau)x(\tau)d\tau.$$

Введем обозначение $g(t) = \dfrac{dh(t)}{dt}$.

Простые выкладки дают

$$\int\limits_0^{t} f(\tau)d\tau - \frac{d}{dt}\int\limits_0^{\omega}\left(\int\limits_0^{\tau} x(\nu)d\nu\right)h(t-\tau)d\tau =$$

$$= \int\limits_0^{t} f(\tau)d\tau + h(t-\omega)\int\limits_0^{\omega} x(\tau)d\tau - \int\limits_0^{\omega} h(t-\tau)x(\tau)d\tau =$$

$$= \int\limits_0^{t} f(\tau)d\tau + h(t-\omega)\int\limits_0^{\omega} x(\tau)d\tau - \int\limits_0^{t}\frac{d}{d\nu}\left(\int\limits_0^{\omega} h(\nu-\tau)x(\tau)d\tau\right)d\nu -$$

$$- \int\limits_0^{\infty} h(-\tau)x(\tau)d\tau = h(t-\omega)\int\limits_0^{\omega} x(\tau)d\tau - \int\limits_0^{\omega} h(-\tau)x(\tau)d\tau.$$

Таким образом,

$$h(t-\omega) = \frac{\int\limits_0^{t} f(\tau)d\tau - f_1(t) + c}{\int\limits_0^{\omega} x(\tau)d\tau},$$

где $c = \int\limits_0^\omega h(-\tau)x(\tau)d\tau$ – константа; $f_1 = \frac{d}{dt}\int\limits_0^\omega \left(\int\limits_0^\tau x(\nu)d\nu\right) h(t-\tau)d\tau$, т.е. $f_1(t)$ – выходной сигнал, соответсвующий $x_1(t) = \int\limits_0^t x(\nu)d\nu$ – входному сигналу.

Продифференцировав полученное выражение, имеем

$$g(t-\omega) = \frac{f(t) - f_1(t)}{\int\limits_0^\omega x(\tau)d\tau}. \qquad (2.2.17)$$

Пример 2.2.2. Пусть объект описывается оператором

$$Lx = \int\limits_0^1 (t-\tau)x(\tau)d\tau.$$

Требуется определить ядро $g(t) = t$.

Решение. Подадим на вход объекта два сигнала $x_1(t) = 1$ и $x_2(t) = t$. Тогда $Lx_1 = 1 - \frac{1}{2}$ и $Lx_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$.

Применяя формулу (2.2.17), имеем $g(t-1) = t-1$, т.е. $g(t) = t$, что совпадает с точным значением ядра.

Заканчивая раздел, отметим, что приведенные выше алгоритмы применимы и для определения параметрической импульсной переходной функции.

В самом деле, рассмотрим уравнение

$$\int\limits_0^t g(r, t-\tau)x(\tau)d\tau = f(r,\tau),$$

где $x(t)$ – входной, а $f(r,t)$ – выходной сигналы; $g(r,t-\tau)$ – локальная импульсная переходная функция.

Тогда по аналогии с предыдущим имеем

$$g(r,t) = \frac{f(r,t) + \frac{df_1(r,t)}{dt}}{\int\limits_0^T x(\tau)d\tau},$$

где

$$f_1(r,t) = \int\limits_0^t g(r,t-\tau)\left(\int\limits_\tau^T x(\nu)d\nu\right)d\tau, \quad \int\limits_0^T x(\tau)d\tau \neq 0.$$

2.2.3. Дискретные системы[1]

Рассмотрим устройство, функционирование которого описывается уравнением

$$\sum_{k=0}^{\infty} g(l-k)x(k) = f(l),\ l = 0, 1, \ldots \tag{2.2.18}$$

Здесь $x(k)$ и $f(k)$ – входной и выходной сигналы; $g(k)$ – импульсная переходная функция, причем она физически реализуема, т. е. $g(k) = 0$ при $k \leq 0$.

Подадим на вход устройства, функционирование которого описывается уравнением (2.2.18), два сигнала:

$x_1(k),\ k = 0, 1, \ldots$ и $x_2(l) = \sum\limits_{k=l}^{\infty} x_1(k), l = 0, 1, ...$

Соответствующие выходные сигналы равны

$$f_1(l) = \sum_{k=0}^{l} g(l-k)x_1(k), l = 0, 1, ..., \tag{2.2.19}$$

$$f_2(l) = \sum_{k=0}^{l} g(l-k) \sum_{\nu=k}^{\infty} x_1(\nu), l = 0, 1, ... \tag{2.2.20}$$

Составим сигнал $\tilde{f}_1(k) = \sum\limits_{m=0}^{k-1} f_1(m)$. Применим к выражениям $\tilde{f}_1(k)$ и $f_2(l)$ Z-преобразование [180]. В результате имеем

$$\tilde{F}_1(z) = \frac{G(z)X_1(z)}{z-1} \tag{2.2.21}$$

и

$$F_2(z) = Z\left[\sum_{k=0}^{l} g(l-k) \sum_{\nu=k}^{\infty} x_1(\nu)\right] =$$

$$= Z\left[\sum_{k=0}^{l} g(l-k)\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} x_1(\nu) - \sum_{\nu=0}^{k-1} x_1(\nu)\right)\right] =$$

$$= G(z)\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} x_1(\nu)\frac{z}{z-1} - \frac{X_1(z)}{z-1}\right). \tag{2.2.22}$$

Складывая равенства (2.2.21) и (2.2.22), получим

$$\tilde{F}_1(z) + F_2(z) = G(z)\frac{z}{z-1}\sum_{\nu=0}^{\infty} x_1(\nu),$$

[1] Результаты этого пункта излагаются, следуя работе [42].

следовательно,

$$G(z) = \frac{(\tilde{F}_1(z) + F_2(z))}{\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} x_1(\nu)} \frac{(z-1)}{z}. \qquad (2.2.23)$$

Переходя в (2.2.23) к оригиналам и используя формулы

$$\frac{z-1}{z} F(z) = f_k - f_{k-1} = \nabla f_k, \ \nabla f_k = \Delta f_{k-1},$$

имеем

$$g(k) = \frac{\nabla \overline{f}_1(k) + \nabla f_2(k)}{\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} x_1(\nu)} = \frac{f_1(k-1) + \Delta f_2(k-1)}{\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} x_1(\nu)}. \qquad (2.2.24)$$

Пример 2.2.3. Пусть ИПФ устройства, описываемого уравнением (2.2.18), имеет вид $g(0) = 0$ и $g(n) = e^{-n}, n = 1, 2, \ldots$

При входных сигналах

$$x_1(n) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \le n \le 7, \\ 0 & \text{при остальных значениях } n \end{cases}$$

и

$$x_2(k) = \sum_{\nu=k}^{\infty} x_1(\nu), l = 0, 1, ...$$

соответствующими выходными сигналами устройства, описываемого уравнением (2.2.18), будут сигналы $f_1(k)$ и $f_2(k)$, значение которых приведены в табл. 2.1.

Таблица 2.1. Значения сигналов $f_1(k)$ и $f_2(k)$

k	1	2	3	4	5	6	7
$f_1(k)$	0.36788	0.50321	0.55300	0.57132	0.57806	0.58053	0.58145
$f_2(k)$	2.94804	3.65788	3.55298	3.14679	2.62912	2.07090	1.49762

Требуется определить приближенные значения импульсной переходной функции $g(n)$.

Решение. Определим приближенное значение $\hat{g}(k)$ импульсной переходной функции $g(k)$ по формуле (2.2.24). Результаты вычислений приведены в табл. 2.2.

Из табл. 2.2 видно, что значения импульсной переходной функции $g(k)$, $k = 0, 1, \ldots$ вычисляются с точностью до шестого знака после запятой.

Таблица 2.2. Результаты вычислений

k	1	2	3	4	5	6	7
$g(k)$	0.36788	0.13534	0.04979	0.01832	0.00674	0.00248	0.00091
$\hat{g}(k)$	0.36788	0.13534	0.04979	0.01832	0.00674	0.00248	0.00091

2.2.4. Многомерные системы[2]

Приступим к определению импульсной переходной функции $g(t_1, \ldots, t_l)$ объекта, функционирование которого описывается уравнением

$$\int_0^{t_1} \ldots \int_0^{t_l} g(t_1 - \tau_1, t_2 - \tau_2, \ldots, t_l - \tau_l) x(\tau_1, \ldots, \tau_l) d\tau_1 \ldots d\tau_l =$$

$$= f(t_1, \ldots, t_l). \qquad (2.2.25)$$

Для простоты обозначений положим $l = 2$. Изменения, которые необходимо сделать при переходе к случаю произвольного конечного l, очевидны.

Пусть на вход объекта подаются два сигнала $x_1(t_1, t_2)$ и

$$x_2(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{\infty}\int_{0}^{\infty} x_1(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 + \int_{0}^{\infty}\int_{t_2}^{\infty} x_1(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 -$$
$$- \int_{t_1}^{\infty}\int_{t_2}^{\infty} x_1(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2.$$

В результате на выходе появляются два сигнала:

$$y_1(t_1, t_2) = \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} g(t_1 - \tau_1, t_2 - \tau_2) x_1(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2; \qquad (2.2.26)$$

$$y_2(t_1, t_2) = \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} g(t_1 - \tau_1, t_2 - \tau_2) \left(\int_{\tau_1}^{\infty}\int_{0}^{\infty} x_1(\nu_1, \nu_2) d\nu_1 d\nu_2 + \right.$$
$$\left. + \int_0^{\infty}\int_{\tau_2}^{\infty} x_1(\nu_1, \nu_2) d\nu_1 d\nu_2 - \int_{\tau_1}^{\infty}\int_{\tau_2}^{\infty} x_1(\nu_1, \nu_2) d\nu_1 d\nu_2 \right) d\tau_1 d\tau_2 =$$
$$= \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} g(t_1 - \tau_1, t_2 - \tau_2) \left(\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} x_1(\nu_1, \nu_2) d\nu_1 d\nu_2 - \right.$$

[2]Раздел написан по материалам статьи [42].

$$- \int_0^{\tau_1} \int_0^{\tau_2} x_1(\nu_1, \nu_2) d\nu_1 d\nu_2 \Bigg) d\tau_1 d\tau_2. \qquad (2.2.27)$$

Применим к уравнениям (2.2.26) и (2.2.27) преобразование Лапласа. В результате имеем

$$Y_1(p_1, p_2) = G(p_1, p_2) X_1(p_1, p_2) \qquad (2.2.28)$$

и

$$Y_2(p_1, p_2) = \frac{G(p_1, p_2)}{p_1 p_2} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} x_1(\nu_1, \nu_2) d\nu_1 d\nu_2 - \frac{G(p_1, p_2)}{p_1 p_2} X_1(p_1, p_2). \qquad (2.2.29)$$

Умножая равенство (2.2.29) на $p_1 p_2$ и складывая полученное выражение с (2.2.18), получаем

$$G(p_1, p_2) = \frac{Y_1(p_1, p_2) + p_1 p_2 Y_2(p_1, p_2)}{\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} x_1(\nu_1, \nu_2) d\nu_1 \nu_2}.$$

Переходя к оригиналам, имеем

$$g(t_1, t_2) = \frac{f_1(t_1, t_2) + \dfrac{\partial^2 f_2(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}}{\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} x_1(\nu_1, \nu_2) d\nu_1 d\nu_2}. \qquad (2.2.30)$$

При практической реализации формулы (2.2.30) возникает необходимость в вычислении частных производных от функции $f_2(t_1, t_2)$. Вычисление производных является некорректной операцией. Для их вычисления могут быть использованы формулы, приведенные в разд. 1.10.

2.3. Приближенные методы определения временных характеристик по одному тестовому сигналу[3]

Импульсная переходная функция является реакцией линейного устройства на δ-образную функцию. В связи с этим большой класс методов определения ИПФ основан на определении реакции

[3]Раздел написан по материалам статьи [55].

устройства на различные δ-образные функции. Подробный обзор этих методов содержится в монографии [71]. В связи с тем, что реализация δ-функции вызывает значительные технические трудности, а погрешность определения импульсной переходной функции, обусловленная заменой δ-функции на δ-образную функцию, велика, представляет значительный интерес разработка методов определения ИПФ при подаче на вход устройства легко реализуемых сигналов.

Рассмотрим линейную систему, функционирование которой описывается уравнением

$$\int_0^t g(t-\tau)x(\tau)d\tau = f(t), \tag{2.3.1}$$

где $x(t)$ и $f(t)$ – входной и выходной сигналы; $g(t)$ – ИПФ.

Будем считать, что функция $g(t)$ физически реализуема, т.е. $g(t) = 0$ при $t < 0$. Кроме того, будем считать, что $g(t)$ – финитная функция с носителем $[0, T_0]$.

В качестве тестового сигнала будем использовать функцию

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \notin [0, T], \\ \sin t & \text{при } t \in [0, T], \end{cases}$$

где $T = (k+1)\pi$, k – такое целое число, при котором $T \geq 3T_0$.

Полагая $t \geq \dfrac{\pi}{2}$, представим уравнение (2.3.1) в виде

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t-\tau)x(\tau)d\tau + \int_{\frac{\pi}{2}}^t g(t-\tau)x(\tau)d\tau = f(t). \tag{2.3.2}$$

Сделаем замену переменных $t = v + \dfrac{\pi}{2}, \tau = w + \dfrac{\pi}{2}$. Тогда уравнение (2.3.2) можно представить в виде

$$\int_0^v g(v-w)x\left(w+\frac{\pi}{2}\right)dw = f(v+\frac{\pi}{2}) - \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 g(v-w)x(w+\frac{\pi}{2})dw, \tag{2.3.3}$$

где v, w изменяются от 0 до $T - \dfrac{\pi}{2}$.

Введем функцию

$$x_1(w) = \begin{cases} 0 & \text{при } w \notin [0, T-\frac{\pi}{2}], \\ \cos w & \text{при } w \in [0, T-\frac{\pi}{2}]. \end{cases}$$

Тогда уравнение (2.3.3) можно записать в виде

$$\int_0^v g(v-w)x_1(w)dw = f\left(v+\frac{\pi}{2}\right) - \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 g(v-w)\cos w dw,$$

или, возвращаясь в записи уравнения к старым переменным, в виде

$$\int_0^t g(t-\tau)x_1(\tau)d\tau = f\left(t+\frac{\pi}{2}\right) - \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 g(t-\tau)\cos\tau d\tau = f_1(t),$$

где $f_1(t)$ – реакция устройства на входное воздействие,

$$x_1(t) = \int_t^{T-\pi/2} x(\tau)d\tau, \quad 0 \le t \le T - \frac{\pi}{2}.$$

Было показано, что на сегменте $\left[0, T-\frac{\pi}{2}\right]$

$$h(t) = \frac{\int_0^t f(\tau)d\tau + f_1(t)}{\int_0^{T-\frac{\pi}{2}} x(\tau)d\tau} \int_0^t = f(\tau)d\tau + f\left(t+\frac{\pi}{2}\right) - \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 g(t-\tau)\cos\tau d\tau. \tag{2.3.4}$$

Так как характеристики $h(t)$ и $g(t)$ связаны соотношением $h(t) = \int_0^t g(\tau)d\tau$, то выражение (2.3.4) можно представить в виде уравнения

$$\int_0^t g(\tau)d\tau + \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 g(t-\tau)\cos\tau d\tau = \int_0^t f(\tau)d\tau + f\left(t+\frac{\pi}{2}\right), \tag{2.3.5}$$

рассматриваемого при $0 \le t \le T - \frac{\pi}{2} = T_1$.

Разобьем сегмент $[0, T_1]$ на $(2k+1)n = N$ равных частей точками $t_l = T_1 l/N,\ l = 0, 1, ..., N$. При этом каждый сегмент $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ делится на n частей.

Аппроксимируем уравнение (2.3.5) системой линейных уравнений, полученной методом механических квадратур:

$$\begin{cases} \frac{\pi}{2n}\left(g(t_1)+g(t_2)\cos t_1+\cdots+g(t_{n+1})\cos t_n\right)=f_2(t_1),\\ \frac{\pi}{2n}\left(g(t_1)+g(t_2)+g(t_3)\cos t_1+\cdots+g(t_{n+2})\cos t_n\right)=f_2(t_2),\\ \ldots\\ \frac{\pi}{2n}\left(g(t_1)+g(t_2)+\cdots+g(t_{N-n})+g(t_{N-n+1})\cos t_2+\right.\\ \left.+\cdots+g(t_N)\cos t_n\right)=f_2(t_{N-n}),\\ \ldots\\ \frac{\pi}{2n}\left(g(t_1)+\cdots+g(t_{N-n+1})+g(t_{N-n+2})\cos t_1+\right.\\ \left.+\cdots+g(t_N)\cos t_{n-1}\right)=f_2(t_{N-n+1}),\\ \ldots\\ \frac{\pi}{2n}\left(g(t_1)+\cdots+\cdots+g(t_N)\right)=f_2(t_N), \end{cases} \tag{2.3.6}$$

где $f_2(t)=\int\limits_0^t f(\tau)d\tau+f(t+\frac{\pi}{2})$. Определитель этой системы равен

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos t_1 & \ldots & \cos t_n & 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0\\ 1 & 1 & \cos t_1 & \ldots & \cos t_n & 0 & 0 & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 1 & 1 & \ldots & \ldots & \ldots & 1 & \cos t_1 & \ldots & \cos t_n\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 1 & 1 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 1 & 1 & \cos t_1\\ 1 & 1 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=(1-\cos t_1)^{N-1}.$$

Следовательно, система уравнений (2.3.6) однозначно разрешима. Так как она плохо обусловлена, то для ее решения нужно воспользоваться специальными приемами для уменьшения погрешности счета. В частности, последовательно вычитая из k-го уравнения $(k-1)$ $(k=n,n-1,\ldots,2)$, получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} &\tfrac{\pi}{2n}\left(1-\cos t_1\right)g(t_N)=f_2(t_N)-f_2(t_{N-1}),\\ &\ldots\\ &\tfrac{\pi}{2n}\left(1-\cos t_1\right)g(t_2)=f_2(t_N)-f_2(t_1)-\tfrac{\pi}{2n}\left[\left(\cos t_1-\cos t_2\right)g(t_3)+\right.\\ &\left.+\cdots+\left(\cos t_{n-1}-\cos t_n\right)g(t_{n+1})-g(t_{n+2})\cos t_n\right],\\ &\tfrac{\pi}{2n}g(t_1)=f_2(t_1)-\tfrac{\pi}{2n}\left[g(t_2)\cos t_1+\cdots+g(t_{n+1})\cos t_n\right], \end{aligned} \tag{2.3.7}$$

из которой легко находим решение уранения (2.3.6).

Таким образом, построен устойчивый метод вычисления ИПФ.

Отметим, что этот метод можно использовать при построении вычислительного устройства. В самом деле, подадим на вход сигнал $x(t)$ и запомним значения выходного сигнала $f(t_k)$ в точках t_k, $(k{=}0,1,\ldots,N+n)$. После этого вычисляются и запомина-

ются значения $f_2(t_k) = \sum_{l=1}^{k} \frac{\pi}{2n} f(t_l) + f(t_{k+n})$. Затем вычисляются и запоминаются значения $\cos t_k$, $(\cos t_k - \cos t_{k-1})$, $k = 1, 2, \ldots, N$.

Для вычисления значений $g(t_k)$, $(k{=}1, 2, \ldots, N)$ по системе уравнений (2.3.7) можно построить вычислительный процесс достаточно простой структуры, последовательно вычисляющий значения $g(t_N)$, $g(t_{N-1})$, $\ldots$, $g(t_1)$.

Замечание 2.3.1. *Аналогичным образом можно построить алгоритм вычисления ИПФ при подаче на вход исследуемого объекта последовательности пилообразных и некоторых других сигналов.*

2.4. Определение импульсной переходной функции при ненулевых начальных условиях

Одной из важных проблем при определении импульсной переходной функции является проблема учета ненулевых начальных условий. Различные методы решения этой проблемы для объектов, функционирование которых описывается уравнением

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} g(t-\tau)x(\tau)d\tau, \ t \geq 0, \tag{2.4.1}$$

описаны в монографии [71].

В уравнении (2.4.1) через $x(t)$ и $y(t)$ обозначены соответственно входной и выходной сигналы, а через $g(t)$ – импульсная переходная функция.

Основным недостатком описанных в [71] методов являются следующие обстоятельства:

1) для учета ненулевых начальных условий необходимо вычислить производные $y'(0), y''(0)$ и более высоких порядков;

2) для учета ненулевых начальных условий используется разложение $y(t) = \int_{-\infty}^{0} g(t-\tau)x(\tau)d\tau$ в ряд Тейлора в окрестности точки $t = 0$. Точность этого разложения невелика, особенно если $g(t)$ отлична от нуля на сегменте $[0, T_0]$ достаточно большой длины.

Ниже предлагается метод точного решения задачи определения ИПФ, основанный на методах теории краевых задач [58].

Аналогичный метод предложен для дискретных устройств.

2.4.1. Непрерывные системы

Пусть импульсная переходная функция финитна с носителем $[0, T]$. В этом случае на значения $y(t)$ при $t \geq 0$ не влияют входные значения $x(t)$ из промежутка $(-\infty, -T)$. Будем считать, что известен входной сигнал $x(t)$ при $0 \leq t < \infty$. Доопределим $x(t)$, полагая $x(t) = 0$ на интервале $(-\infty, -T)$. Требуется определить ИПФ $g(t)$ при $0 \leq t \leq T$.

Введем обозначения:

$$x^+(t) = \begin{cases} x(t), & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \quad x^-(t) = \begin{cases} -x(t), & t < 0, \\ 0, & t \geq 0; \end{cases}$$

аналогичный смысл имеют обозначения y^+, y^- и т.д.

Тогда при $t \geq 0$ уравнение (2.4.1) можно представить в виде

$$y^+(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau)x^+(\tau)d\tau - \int_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau)x^-(\tau)d\tau \,(t \geq 0). \quad (2.4.2)$$

Это уравнение можно распространить на всю числовую ось, введя неизвестную функцию $y^-(t)$.

Тогда уравнение (2.4.2) примет вид

$$y^+(t) - y^-(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau)x(\tau)d\tau. \quad (2.4.3)$$

Применим к уравнению (2.4.3) преобразование Фурье. Учитывая, что по условиям физической реализуемости $g(t) = 0$ при $t < 0$ и то обстоятельство [59], что преобразование Фурье функции $\varphi^+(t)(\varphi^-(t))$, равной нулю на $(-\infty, 0)$ $((0, \infty))$, является аналитической функцией в верхней (нижней) полуплоскости плоскости комплексной переменной z, приходим к краевой задаче:

$$Y^+(\omega) - Y^-(\omega) = G^+(\omega)X(\omega). \quad (2.4.4)$$

Здесь через $Y^+(\omega)(Y^-(\omega))$ обозначены аналитические функции в верхней (нижней) полуплоскости. В уравнении (2.4.4) неизвестными являются функции $G^+(\omega)$ и $Y^-(\omega)$.

Рассмотрим некоторые методы решения уравнения (2.4.4). Известны [59] аналитические методы решения уравнения (2.4.4). Для удобства представим (2.4.4) в принятой в теории краевых задач форме, положив

$$F^+(\omega) = G^+(\omega),\ F^-(\omega) = Y^-(\omega),$$
$$D(\omega) = -1/X(\omega),\ H(\omega) = Y^+(\omega)/X(\omega).$$

Тогда уравнение (2.4.4) имеет вид

$$F^+(\omega) = D(\omega)F^-(\omega) + H(\omega). \qquad (2.4.5)$$

Решение уравнения (2.4.5) при различных предположениях относительно функций $D(\omega)$ и $H(\omega)$ приведено в монографии [59] (см. также разд. 1.8). Найдя функцию $F^+(\omega) = G^+(\omega)$, легко вычислить ИПФ $g(t)$ по известным квадратурным [76] формулам преобразования Фурье.

Недостатком этого метода является его громоздкость, заключающаяся в необходимости вычислять прямое и обратное преобразования Фурье и вычислять достаточно сложные интегралы, которыми описывается решение краевой задачи (2.4.5).

Поэтому в практическом отношении более предпочительным является итерационный метод, который является развитием результатов работы [39].

Предположим, что для функции $X(\omega)$ выполнено условие A [40]: значения функции $X(\omega)$ лежат внутри угла раствора меньшего π с вершиной в начале координат, причем при конечных значениях ω $X(\omega) \neq 0$. Тогда существует такая константа γ, что

$$\sup_{-\infty\leq\omega\leq\infty} |1 + \gamma X(\omega)| \leq 1.$$

Введем функции $\varphi(t) = \varphi^+(t) - \varphi^-(t)$, где

$$\varphi^+(t) = g(t),\ \varphi^-(t) = \gamma y^-(t) \text{ и } h(t) = \gamma y^+(t).$$

Тогда уравнение (2.4.3) можно записать в виде

$$h(t) - \varphi^-(t) = \gamma \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^+(t-\tau)x(\tau)d\tau.$$

Прибавляя к обеим частям последнего уравнения функцию $\varphi^+(t)$, имеем

$$\varphi(t) = \varphi^+(t) + \gamma \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^+(t-\tau)x(\tau)d\tau - h(t).$$

Образуем итерационный процесс

$$\varphi_{n+1}(t)=\alpha_n\varphi_n(t)+(1-\alpha_n)(\varphi_n^+(t)+\gamma \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)\varphi_n^+(\tau)d\tau-h(t)), \qquad (2.4.6)$$

где $0<\alpha\leq\alpha_n<1-\beta,\ \alpha,\ \beta>0$, и докажем его сходимость в метрике пространства $L_2(-\infty,\infty)$:

$$\|\varphi_{n+1}-\varphi_n\|\leq\alpha_n\|\varphi_n-\varphi_{n-1}\|+(1-\alpha_n)\|(\varphi_n^+(t)-\varphi_{n-1}^+(t))+$$
$$+\gamma\int\limits_{-\infty}^{\infty}x(t-\tau)(\varphi_n^+(\tau)-\varphi_{n-1}^+(\tau))d\tau\leq\|\alpha_n\|\varphi_n-\varphi_{n-1}\|+$$
$$+(1-\alpha_n)\|(\Phi_n^+(\omega)-\Phi_{n-1}^+(\omega))+\gamma X(\omega)(\Phi_n^+(\omega)-\Phi_{n-1}^+(\omega))\|\leq$$
$$\leq\alpha_n\|\varphi_n-\varphi_{n-1}\|+(1-\alpha_n)\sup_{-\infty\leq\omega\leq\infty}|1+\gamma X(\omega\|\|\Phi_n^+(\omega)-\Phi_{n-1}^+(\omega)\|\leq$$
$$\leq\|\varphi_n-\varphi_{n-1}\|.$$

Из этого неравенства и результатов, изложенных в разд. 1.3.1, следует, что итерационный процесс (2.4.6) сходится к функции $\varphi^*(t)$. Таким образом, $g(t)=\varphi^{*+}(t)$.

2.4.2. Дискретные системы

Рассмотрим устройство, функционирование которого описывается уравнением

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}g(l-k)x(k)=f(l),l=\ldots-n,\ldots,-1,0,1,\ldots,n\ldots\quad(2.4.7)$$

Здесь x и $f-$ входной и выходной сигналы; $g(k)$ – импульсная переходная функция, из условия физической реализуемости которой следует, что $g(k)=0$ при $k\leq 0$.

Требуется определить импульсную переходную функцию $g(k)$ при неизвестных начальных условиях. Будем считать, что $g(k)$ финитна с носителем $[0,N]$.

Пусть известны значения $x(k)$ при $-N\leq k\leq N$ и $f(l)$ при $0\leq l\leq N_1+N$, где N_1- момент окончания работы объекта.

Введя обозначения

$$x^+(k)=\begin{cases}x(k) & \text{при } k\geq 0,\\ 0 & \text{при } k<0,\end{cases}\quad x^-(k)=\begin{cases}0 & \text{при } k\geq 0,\\ -x(k) & \text{при } k<0\end{cases}$$

и аналогичные обозначения для $g(k)$ и $f(k)$, уравнения (2.4.7) представим в виде

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}g^+(l-k)x(k)=f^+(l)-f^-(l),l=-\infty,\ldots,N+N_1.\quad(2.4.8)$$

В уравнении (2.4.8) неизвестными являются функции $g^+(k)$ и $f^-(k)$. Применим к уравнению (2.4.8) дискретное преобразование

Фурье. В результате приходим [59] (см. также разд. 1.8) к краевой задаче Римана:

$$G^+(t)X(t) = F^+(t) - F^-(t), |t| = 1, \tag{2.4.9}$$

где

$$X(t) = \sum_{k=-N}^{N} x(k)e^{ik\theta} = \sum_{k=-N}^{N} x(k)t^k.$$

Так как $g(k) = 0$ при $k < 0$, а $f^-(l) = 0$ при $l > 0$, то функции $G^+(t), F^+(t), (F^-(t))-$ предельные значения функций аналитических внутри (вне) единичной окружности с центром в начале координат.

Таким образом, задача определения импульсной характеристики объекта с неизвестными начальными условиями сведена к краевой задаче Римана

$$G^+(t) = -\frac{1}{X(t)}F^-(t) + \frac{F^+(t)}{X(t)} \tag{2.4.10}$$

с неизвестными функциями $G^+(t)$ и $F^-(t)$. Полное решение этой задачи приведено в [58, 59] (см. также разд. 1.8).

Для решения уравнения (2.4.10) можно также построить итерационный метод, аналогичный (2.4.6).

2.5. Метод преобразований при идентификации динамических систем[4]

Актуальной является задача определения динамических характеристик систем с распределенными параметрами, описываемых уравнениями Вольтерра:

$$\int_0^t g(t,\tau)x(\tau)d\tau = f(t), \tag{2.5.1}$$

уравнениями на полуоси:

$$\int_0^\infty g(t,\tau)x(\tau)d\tau = f(t), \tag{2.5.2}$$

[4]Данный раздел написан по материалам работ [26, 34, 35].

и уравнениями на оси:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t,\tau)x(\tau)d\tau = f(t). \tag{2.5.3}$$

Уравнение (2.5.1) является частным случаем уравнения (2.5.2). Действительно, введя функцию $K(t,\tau) = 1$ при $t \geq \tau$ и $K(t,\tau) = 0$ при $t < \tau$, уравнение (2.5.1) можно представить в виде

$$\int_{0}^{\infty} K(t,\tau)g(t,\tau)x(\tau)d\tau = f(t). \tag{2.5.4}$$

Опишем несколько систем с распределенными параметрами, которые приводят к уравнениям вида (2.5.2).

Одна из таких систем моделируется задачей Коши для уравнения теплопроводности. Напомним определение задачи Коши для уравнения теплопроводности.

Задача Коши. Найти ограниченную функцию $u(x,t)$, определенную в области $-\infty < x < \infty, t > 0$, удовлетворяющую уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; -\infty < x < \infty, t > 0, \tag{2.5.5}$$

и начальному условию

$$u(x,0) = \varphi(x), -\infty < x < \infty. \tag{2.5.6}$$

Известно [47,131] интегральное представление решения задачи Коши (2.5.5), (2.5.6):

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x,\xi,t)\varphi(\xi)d\xi, \tag{2.5.7}$$

где

$$G(x,\xi,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4at}}. \tag{2.5.8}$$

Постановка задачи. Известно начальное условие

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi_0(x),\ x \geq 0, \\ 0,\ t < 0 \end{cases} \tag{2.5.9}$$

и решение задачи Коши (2.5.5), (2.5.6) в точке $x = 0$. Требуется найти коэффициент a.

Из уравнения (2.5.7) следует, что

$$u(0,t) = \int_0^t G(0,\xi,t)\varphi_0(\xi)d\xi. \qquad (2.5.10)$$

Считая $\varphi_0(\xi)$ входным сигналом, $u(0,t)$ выходным сигналом, задачу можно свести к нахождению функции $G(0,\xi,t)$.

Таким образом, задача определения коэффициента a уравнения теплопроводности (2.5.5) сводится к решению интегрального уравнения (2.5.2).

Аналогичная связь между краевыми задачами и интегральными уравнениями вида (2.5.1), (2.5.2) имеет место и для гиперболических и эллиптических уравнений.

В работе [25] предложен алгоритм приближенного нахождения функции $g(t,\tau)$ при подаче на вход ступенчатых сигналов. Этот метод изложен в разд. 2.6.1.

Совершенно естественно поставить задачу нахождения функции $g(t,\tau)$ при наименьшем числе входных сигналов. Невозможно определить функцию $g(t,\tau)$ двух независимых переменных подачей на вход одного сигнала $x(t)$, зависящего от одной независимой переменной. Поэтому разработка метода восстановления функции $g(t,\tau)$ по двум входным сигналам представляет значительный интерес (особенно в случаях, когда проведение испытаний дорого или занимает много времени).

Важным моментом при создании систем автоматического управления является исследование следующих характеристик систем [138]:

– время перерегулирования (время переходного процесса);

– перерегулирование;

– статистическое отклонение;

– частота колебаний процесса;

– время установления;

– декремент затухания.

Для исследования этих характеристик необходимо располагать методами нахождения переходных функций или, что то же самое, импульсных переходных функций систем управления. Этим вопросам посвящен данный раздел. Предлагемый метод основан на интегральных преобразованиях для непрерывных систем и Z-преобразовании для дискретных. В качестве интегральных преобразований рассматриваютя интегральные преобразования Лапласа, Фурье, Меллина, Хартли.

2.5.1. Непрерывные системы

Рассмотрим интегральное уравнение

$$\int_a^b g(t,\tau)x(\tau)d\tau = y(t), a = 0, -\infty; b = t, \infty, \tag{2.5.11}$$

которому поставим в соответствие интегральное преобразование

$$\int_a^b k(\lambda,t)\varphi(t)dt = \Phi(\lambda), a = 0, -\infty; b = t, \infty; \tag{2.5.12}$$

предельные значения в (2.5.11) и (2.5.12) согласованы друг с другом.

Пусть функция $g(t,\tau)$ удовлетворяет условию

$$\int_a^b k(\lambda,t)g(t,\tau)dt = G(\lambda)k(q(\lambda),\tau), \tag{2.5.13}$$

где $q(\lambda)-$ некоторая функция.

Тогда, применяя интегральное преобразование (2.5.12) к уравнению (2.5.11), получим

$$G(\lambda)X(q(\lambda)) = Y(\lambda), \tag{2.5.14}$$

где $X(\lambda)$, $Y(\lambda)-$ интегральные преобразования (2.5.12) функций $x(t)$, $y(t)$.

Действительно, применим интегральное преобразование (2.5.12) к уравнению (2.5.11). Учитывая (2.5.13), имеем

$$\int_a^b k(\lambda,t)\left(\int_a^b g(t,\tau)x(\tau)d\tau\right)dt = \int_a^b x(\tau)\left(\int_a^b k(\lambda,t)g(t,\tau)dt\right)d\tau =$$

$$= \int_a^b x(\tau)G(\lambda)k(q(\lambda),\tau)d\tau = G(\lambda)X(q(\lambda)).$$

Откуда следует справедливость (2.5.14).

Замечание 2.5.1. *В качестве преобразования* (2.5.13) *может выступать любое известное интегральное преобразование.*

Рассмотрим динамическую систему, описываемую уравнением (2.5.11) при входном сигнале $x(t)$, выходном сигнале $f(t)$, импульсной переходной функции $g(t,\tau)$, удовлетворяющей условию (2.5.13).

Требуется восстановить функцию $g(t,\tau)$.

Подавая на вход системы, описываемой уравнением (2.5.11), два линейно независимых входных сигнала $x_1(t)$ и $x_2(t)$, получим систему интегральных уравнений:

$$\int_a^b g(t,\tau)x_i(\tau)d\tau = f_i(t),\ i=1,2, \tag{2.5.15}$$

где $f_i(t)$ – выходные сигналы, $i=1,2$.

Применяя интегральное преобразование (2.5.12) к системе интегральных уравнений (2.5.15), получим систему нелинейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} G(s)X_1(q(s)) = F_1(s), \\ G(s)X_2(q(s)) = F_2(s) \end{cases} \tag{2.5.16}$$

с неизвестными функциями $G(s)$ и $q(s)$. Решая систему (2.5.16) относительно этих функций, находим $G(s)$ и $q(s)$. Функция $g(t,\tau)$ будет находиться из решения интегрального уравнения

$$\int_a^b k(\lambda,t)g(t,\tau)dt = G(\lambda)k(q(\lambda),\tau),$$

или в результате применения к (2.5.13) преобразования, которое является обратным для (2.5.12) (если оно известно).

Замечание 2.5.2. *Для определения ИПФ $g(t,\tau)$ системы, описываемой интегральным уравнением* (2.5.11) *при входном сигнале $x(t)$, выходном сигнале $f(t)$ и импульсной переходной функции $g(t,\tau)$, можно использовать линейную комбинацию интегральных преобразований.*

2.5.1.1. Преобразование Лапласа

Предложен алгоритм восстановления импульсной переходной функции динамической системы по двум тестовым сигналам, обоснование которого опирается на обобщенную теорему Бореля [185].

Ниже эта теорема используется в следующем модифицированном виде.

Рассмотрм два интегральных уравнения Карсона:

$$\int_0^\infty e^{-pt}\varphi(t)dt = \Phi(p) \tag{2.5.17}$$

и

$$\int_0^\infty e^{-pt}\varphi_1(t)dt = \Phi_1(p). \tag{2.5.18}$$

Пусть известно решение $\varphi^*(t)$ уравнения (2.5.17). Предположим, что существуют аналитические функции $q(p)$ и $u(p)$ такие, что правые части уравнений (2.5.17) и (2.5.18) связаны формулой

$$\Phi_1(p) = \Phi(q(p))u(p). \tag{2.5.19}$$

Теорема 2.5.1. *Пусть даны два уравнения Карсона* (2.5.17) *и* (2.5.18). *Пусть* $\varphi^*(t)$ *– решение уравнения* (2.5.17), *а правые части уравнений* (2.5.17) *и* (2.5.18) *связаны формулой* (2.5.19). *Тогда решение уравнения* (2.5.18) *дается формулой*

$$\varphi_1^*(t) = \int_0^\infty \psi(t,\tau)\varphi^*(\tau)d\tau, \tag{2.5.20}$$

где функция $\psi(\tau,t)$ *является решением интегрального уравнения*

$$\int_0^\infty \psi(t,\tau)e^{-pt}dt = e^{-\tau q(p)}u(p). \tag{2.5.21}$$

Доказательство. Решение уравнения (2.5.17) определяется формулой Бромвича:

$$\varphi^*(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{pt}\Phi(p)dp. \tag{2.5.22}$$

Подставляя в (2.5.17) $q(p)$ вместо p, имеем

$$\Phi(q(p)) = \int_0^\infty e^{-tq(p)}\varphi^*(t)dt. \tag{2.5.23}$$

Применяя к (2.5.18) формулу Бромвича, получаем

$$\varphi_1^*(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{pt}\Phi(q(p))u(p)dp. \tag{2.5.24}$$

Подставляя (2.5.23) в (2.5.24), получим, поменяв порядок интегрирования:

$$\varphi_1^*(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{pt} \left(\int\limits_0^\infty e^{-\tau q(p)} \varphi^*(\tau) d\tau \right) u(p) dp =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_0^\infty \varphi^*(\tau) \left(\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{-\tau q(p)+pt} u(p) dp \right) d\tau. \qquad (2.5.25)$$

Положим

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{-\tau q(p)+pt} u(p) dp = \psi(t,\tau). \qquad (2.5.26)$$

Тогда, учитывая (2.5.25), (2.5.26), получим

$$\int\limits_0^\infty e^{-pt} \psi(t,\tau) dt = e^{-\tau q(p)} u(p). \qquad (2.5.27)$$

Следовательно, уравнение (2.5.18) имеет решение

$$\varphi_1^*(t) = \int\limits_0^\infty \psi(t,\tau) \varphi^*(\tau) d\tau. \qquad (2.5.28)$$

Теорема доказана.

Отметим, что справедливо и обратное утверждение: если выполнено условие (2.5.21) и функция $\varphi^*(t)$ является решением уравнения (2.5.17), то функция $\varphi_1^*(t)$, определяемая равенством (2.5.20), является решением уравнения (2.5.18).

В самом деле,

$$\int\limits_0^\infty e^{-pt} \varphi_1^*(t) dt = \int\limits_0^\infty e^{-pt} \int\limits_0^\infty \psi(t,\tau) \varphi^*(\tau) d\tau dt =$$

$$= \int\limits_0^\infty \varphi^*(\tau) \left(\int\limits_0^\infty e^{-pt} \psi(t,\tau) dt \right) d\tau =$$

$$= \int\limits_0^\infty \varphi^*(\tau) e^{-\tau q(p)} u(p) d\tau =$$

$$= u(p) \int\limits_0^\infty \varphi^*(\tau) e^{-\tau q(p)} d\tau = u(p) \Phi^*(q(p)),$$

т.е. $\Phi_1^*(p) = \Phi^*(q(p))u(p)$. Здесь $\Phi^*(p)$ и $\Phi_1^*(p)$– преобразование Лапласа функций $\varphi^*(t)$ и $\varphi_1^*(t)$.

Применение обобщенной теоремы Бореля позволяет определить импульсную переходную функцию для широкого класса преобразователей.

Рассмотрим динамическую систему, описываемую интегральным уравнением

$$\int_0^\infty g(t,\tau)x(\tau)d\tau = f(t). \tag{2.5.29}$$

Здесь $x(t)$ – входной сигнал, $f(t)$– выходной сигнал. Требуется восстановить функцию $g(t,\tau)$. Пусть функция $g(t,\tau)$ удовлетворяет следующему условию: существуют аналитические в полуплоскости $\mathrm{Re}p \geq \sigma(\sigma = \mathrm{const})$ функции $q(p)$ и $u(p)$ такие, что преобразование Лапласа функуции $g(t,\tau)$ по переменной t удовлетворяет условию

$$G(p,\tau) = u(p)e^{-\tau q(p)}, \tag{2.5.30}$$

или

$$\int_0^\infty e^{-pt}g(t,\tau)d\tau = e^{-\tau q(p)}u(p),\ \mathrm{Re}p \geq \sigma. \tag{2.5.31}$$

Назовем это равенство условием (q,u). Пусть $X(p)$ – преобразование Лапласа функции $x(t)$; $F(p)$ – преобразование Лапласа функции $f(t)$. Тогда изображение уравнения (2.5.29) будет иметь вид

$$F(p) = X(q(p))u(p), \tag{2.5.32}$$

тогда импульсная переходная функция $g(t,\tau)$ определяется формулой

$$g(t,\tau) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{-\tau q(p)}u(p)e^{pt}dp. \tag{2.5.33}$$

Вычисляя интеграл в правой части формулы (2.5.33) по квадратурным формулам [8], получаем приближенное значение импульсной переходной функции.

Отметим, что условие (2.5.30), (2.5.31) выполняется для широкого класса импульсных переходных функций. В частности, ему удовлетворяют ядра вида $g(t-\tau)$.

Продемонстрируем эффективность этого алгоритма на примере классического уравнения Абеля.

Пример 2.5.1. Рассмотрим динамическую систему, описываемую уравнением

$$\int_0^t g(t,\tau)x(\tau)d\tau = f(t). \tag{2.5.34}$$

Пусть ИПФ системы (2.5.34) имеет вид

$$g(t,\tau) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{t-\tau}}, & t \geq \tau, \\ 0, & t < \tau. \end{cases}$$

Требуется, при известных

– входном сигнале

$$x(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$

– выходном сигнале

$$f(t) = \begin{cases} \sqrt{t}, t \geq 0, \\ 0, t < 0 \end{cases}$$

определить ИПФ системы (2.5.34)

Решение. Преобразования Лапласа входного и выходного сигналов будут равны

$$\begin{aligned} X(p) &= \frac{1}{2p}, \\ F(p) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2p^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2p}\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{p}}. \end{aligned} \tag{2.5.35}$$

Предположим, что функция $g(t,\tau)$ удовлетворяет условию (q,p) (2.5.30), (2.5.31), тогда

$$X(q(p))u(p) = F(p), \tag{2.5.36}$$

где функции $q(p)$ и $u(p)$ аналитические в полуплоскости $\mathrm{Re}z \geq \sigma$.

Тогда из равенств (2.5.35), (2.5.36) имеем

$$F(p) = \frac{\sqrt{\pi}}{p}X(p),$$

следовательно,

$$q(p) = p, u(p) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{p}}.$$

Из формулы (2.5.30) следует, что $G(p,\tau) = \sqrt{\frac{\pi}{p}}e^{-\tau p}$. Это соответсвует оригиналу $g(t,\tau) = \frac{1}{\sqrt{t-\tau}}$, который совпадает с точным решением.

Таким образом, доказано, что функционирование системы описывается уравнением

$$\int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} x(\tau)d\tau = y(t).$$

Пример 2.5.2. Рассмотрим систему, описываемую уравнением

$$\int_0^\infty g(t,\tau)x(\tau)d\tau = f(t),$$

где

$$g(t,\tau) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{\tau^2}{4t}}, & t \geq \tau, \\ 0, t < \tau. \end{cases}$$

В качестве входного сигнала возьмем

$$x(t) = \begin{cases} \cos t,\ t \geq 0, \\ 0,\ t < 0. \end{cases}$$

Выходной сигнал представим функцией

$$f(t) = \begin{cases} e^{-t},\ t \geq 0, \\ 0,\ t < 0. \end{cases}$$

Преобразования Лапласа входного и выходного сигналов будут равны

$$X(p) = \frac{p}{p^2+1}, F(p) = \frac{1}{p+1}.$$

Предполагая, что имеет место представление $F(p)=X(q(p))u(p)$, имеем $q(p)=\sqrt{p}$, и $u(p)=\frac{1}{\sqrt{p}}$.

Действительно,

$$X(q(p))u(p) = \frac{q(p)}{q^2(p)+1}\frac{1}{\sqrt{p}} = \frac{\sqrt{p}}{p+1}\frac{1}{\sqrt{p}} = \frac{1}{p+1} = F(p).$$

Значит (по теореме Бореля) $G(p,\tau)=\dfrac{e^{-\tau\sqrt{p}}}{\sqrt{p}}$, где $G(p,\tau)$ – преобразование Лапласа по первой переменной функции $g(t,\tau)$.

Оригинал $g(t,\tau)$ функции $G(p,\tau)$ равен $g(t,\tau)=\dfrac{e^{-\frac{\tau^2}{4t}}}{\sqrt{\pi t}}$, что совпадает с точным решением.

Установление справедливости формулы $F(p) = X(q(p))u(p)$ часто является сложной технической задачей.

Поэтому при решении практических задач применим следующий метод. Предположим, что преобразование Лапласа $G(p,\tau)$ функции $g(t,\tau)$ по переменной t имеет вид

$$G(p,\tau) = \sum_{k=1}^{N} e^{-\tau q_k(p)} u_k(p), \tag{2.5.37}$$

где $q_k(p)$ и $u_k(p)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, – множества аналитических в некоторой полуплоскости $\mathrm{Re}z \geq \sigma$ функций.

Замечание 2.5.3. *Отметим, что несмотря на то, что функция $g(t,\tau)$ и, следовательно, функция $G(p,\tau)$, неизвестны, из характера задачи часто становится ясно, что разложение вида* (2.5.37) *имеет место. В частности, оно имет место при решении обратных задач, описываемых параболическими и гиперболическими уравнениями.*

В этом случае, применяя преобразование Лапласа к уравнению (2.5.29) и учитывая разложение (2.5.37), получим

$$\int_0^\infty x(\tau) \left(\int_0^\infty e^{-pt} g(t,\tau) dt \right) d\tau =$$

$$= \int_0^\infty x(\tau) \left(\sum_{k=1}^{N} e^{-\tau q_k(p)} u_k(p) \right) d\tau = \sum_{k=1}^{N} u_k(p) \int_0^\infty x(\tau) e^{-\tau q_k(p)} d\tau =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} u_k(p) X(q_k(p)) = F(p). \tag{2.5.38}$$

Из уравнения (2.5.38) следует, что подавая на вход динамической системы (2.5.29) $2N$ линейно независимых сигналов $x_i(t)$, $i = 1, 2, ..., 2N$, получаем систему из $2N$ нелинейных уравнений

$$\sum_{k=1}^{N} u_k(p) X_i(q_k(p)) = F_i(p), i = 1, 2, ..., 2N. \tag{2.5.39}$$

Для решения системы уравнений (2.5.39) можно воспользоваться известными в вычислительной математике методами решения систем нелинейных алгебраических ураванений [8]. Найдя функции $u_k(p), q_k(p)$, функцию $g(t,\tau)$находим, применяя интеграл Бромвича к функции $G(p,\tau) = \sum\limits_{k=1}^{N} e^{-\tau q_k(p)} u_k(p)$:

$$g(t,\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} e^{pt} G(p,t) dp.$$

Пример 2.5.3. Рассмотрим динамическую систему, описываемую уравнением

$$\int\limits_0^{\infty} g(t,\tau) x(\tau) d\tau = f(t),$$

где

$$g(t,\tau) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{\tau^2}{4t}} + \dfrac{1}{\sqrt{\tau}} e^{-\alpha\sqrt{t\tau}}, & t \geq \tau. \\ 0, \quad t < \tau. \end{cases}$$

В качестве входных сигналов возьмем (здесь $N = 2$ в разложении (2.5.37))

$$x_1(t) = \begin{cases} 1, t \geq 0, \\ 0, t < 0; \end{cases} \quad x_2(t) = \begin{cases} t, t \geq 0, \\ 0, t < 0; \end{cases}$$

$$x_3(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t^2, t \geq 0, \\ 0, t < 0; \end{cases} \quad x_4(t) = \begin{cases} \frac{1}{6}t^3, t \geq 0, \\ 0, t < 0. \end{cases}$$

Решение. Изображением входных и выходных сигналов будут функции

$$X_1(p) = \frac{1}{p}; X_2(p) = \frac{1}{p^2}; X_3(p) = \frac{1}{p^3}; X_4(p) = \frac{1}{p^4};$$

$$F_1(p) = \frac{1}{p} + \frac{2}{\sqrt{\pi p}}; F_2(p) = \frac{1}{p\sqrt{p}} + \frac{8p}{\alpha\sqrt{\pi p}};$$

$$F_3(p) = \frac{1}{p^2} + \frac{32p^2}{\alpha^2\sqrt{\pi p}}; F_4(p) = \frac{1}{p^2\sqrt{p}} + \frac{128p^3}{\alpha^3\sqrt{\pi p}}.$$

В результате система уравнений (2.5.39) примет вид

$$\begin{cases} u_1 y_1 + u_2 y_2 = F_1, \\ u_1 y_1^2 + u_2 y_2^2 = F_2, \\ u_1 y_1^3 + u_2 y_2^3 = F_3, \\ u_1 y_1^4 + u_2 y_2^4 = F_4, \end{cases}$$

где

$$y_1 = \frac{1}{q_1(p)}, y_2 = \frac{1}{q_2(p)}, u_1 = u_1(p), u_2 = u_2(p);$$
$$F_1 = F_1(p), F_2 = F_2(p), F_3 = F_3(p), F_4 = F_4(p).$$

Решая последнюю систему, получим

$$q_1(p) = \sqrt{p}, u_1(p) = \tfrac{1}{\sqrt{p}},$$
$$q_2(p) = \tfrac{\alpha}{4p}, u_1(p) = \tfrac{\alpha}{2\sqrt{\pi p^3}}.$$

Отсюда $G_1(p,\tau) = \dfrac{1}{\sqrt{p}} e^{-\tau\sqrt{p}}, G_1(p,\tau) = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi p^3}} e^{-\tau\frac{\alpha}{4p}}$; их обратные преобразования равны

$$g_1(t,\tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{\tau^2}{4t}}, g_2(t,\tau) = \frac{1}{\sqrt{\tau}} e^{-\alpha\sqrt{t\tau}},$$

и искомая функция определяется выражением

$$g(t,\tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{\tau^2}{4t}} + \frac{1}{\sqrt{\tau}} e^{-\alpha\sqrt{t\tau}},$$

что совпадает с точным решением

Если функция $G(p,\tau)$ представима в виде $G(p,\tau) = e^{-\tau q(p)} u(p)$, то импульсная переходная функция восстанавливается по двум сигналам (хотя возможно восстановить и по одному сигналу, как показано в примерах 2.5.1, 2.5.2). Действительно, обозначим преобразования Лапласа функций $x(t)$ и $f(t)$ через $X(p)$ и $F(p)$ соответственно. Будем считать, что функции $q(p)$ и $u(p)$ аналитические при $p \geq \sigma_0$.

Пусть $x_1(t)$ и $x_2(t)$ – два линейно независимых входных сигнала, тогда

$$\int_0^\infty g(t,\tau) x_i(\tau) d\tau = f_i(t), i = 1,2. \tag{2.5.40}$$

Изображение системы интегральных уравнений (2.5.40) по теореме Бореля приводит к системе нелинейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} u(p) X_1(q(p)) = F_1(p), \\ u(p) X_2(q(p)) = F_2(p) \end{cases} \tag{2.5.41}$$

с неизвестными функциями $u(p)$ и $q(p)$. Решая систему (2.5.41) относительно этих функций, находим $u(p)$ и $q(p)$. Функция $g(t,\tau)$ находится по формуле Бромвича:

$$g(t,\tau)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma_0-i\infty}^{\sigma_0+i\infty}e^{pt}G(p,\tau)dp.$$

Для вычисления последнего интеграла можно использовать различные вычислительные методы. Наиболее удобным является использование квадратурных формул [8].

2.5.1.2. Преобразование Фурье

Аналоги теоремы Бореля справедливы и для других интегральных преобразований. В частности, такой аналог справедлив и для преобразования Фурье.

Теорема 2.5.2. *Пусть даны два интегральных уравнения*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{izt}dt=F(z),\ F(z)\in L_2(-\infty,+\infty) \tag{2.5.42}$$

и

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f_1(t)e^{izt}dt=F_1(z),\ F(z)\in L_2(-\infty,+\infty). \tag{2.5.43}$$

Пусть уравнение (2.5.42) *имеет решение* $f^*(t)$. *Предположим, что существуют аналитические функции* $q(z)$ *и* $u(z)$; $q(z)$, $u(z)\in L_2(-\infty,+\infty)$ *такие, что правые части уравнений* (2.5.42) *и* (2.5.43) *связаны формулой*

$$F_1(z)=F(q(z))u(z).$$

Тогда решение f_1^* *уравнения* (2.5.43) *вычисляется по формуле*

$$f_1^*(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}k(\tau,t)f^*(\tau)d\tau,$$

где функция $k(\tau,t)$ *является решением интегрального уравнения*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}k(\tau,t)e^{izt}dt=e^{i\tau q(z)}u(z).$$

Доказательство. Решение уравнения (2.5.42) вычисляется по формуле

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-i\infty}^{+i\infty} F(z) e^{-izt} dz.$$

Подставляя в (2.5.42) $q(z)$ вместо z, имеем

$$F(q(z)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{iq(z)t} dt. \tag{2.5.44}$$

Из уравнения (2.5.43) следует, что

$$f_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{i\infty} F(q(z)) u(z) e^{-izt} dz. \tag{2.5.45}$$

Подставляя (2.5.44) в (2.5.45) и меняя порядок интегрирования, имеем

$$f_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{i\tau q(z)} d\tau \right) u(z) e^{-izt} dz =$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} u(z) e^{i(\tau q(z) - zt)} dz \right) d\tau.$$

Положим

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} u(z) e^{i\tau q(z) - izt} dz = k(\tau, t),$$

тогда

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} k(\tau, t) e^{izt} dt = e^{i\tau q(z)} u(z).$$

Следовательно, уравнение (2.5.43) имеет решение

$$f_1^*(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} k(\tau, t) f^*(\tau) d\tau. \tag{2.5.46}$$

Замечание 2.5.4. *Было показано, что определение коэффициента a параболического уравнения* (2.5.5) *сводится к уравнению* (2.5.2) *при условии, что начальное значение равно нулю на полуоси* $(-\infty, 0)$. *Пользуясь представлением* (2.5.46), *можно показать, что задача определения коэффициента a сводится к решению уравнения* (2.5.3) *при любом начальном значении в задаче* (2.5.5), (2.5.6).

2.5.1.3. Преобразование Меллина

Пусть σ_1, σ_2 – действительные числа, $\sigma_1 < \sigma_2$, функция $f(t)$ определена при $t > 0$ и удовлетворяет условиям

$$\int_0^1 |f(t)|\, t^{\sigma_1 - 1} dt < \infty,$$

$$\int_0^\infty |f(t)|\, t^{\sigma_2 - 1} dt < \infty.$$

Тогда преобразование Меллина определяется выражением

$$\int_0^\infty f(t) t^{s-1} dt = F(s).$$

Обратное преобразование Меллина определяется формулой

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} F(s) t^{-s} ds = f(t),$$

где $s = \sigma + i\omega, \sigma_1 < \sigma < \sigma_2, -\infty < \omega < \infty$.

Теорема 2.5.3. *Пусть даны два интегральных уравнения:*

$$\int_0^\infty \varphi(t) t^{s-1} dt = \Phi(s) \tag{2.5.47}$$

и

$$\int_0^\infty \varphi_1(t) t^{s-1} dt = \Phi_1(s). \tag{2.5.48}$$

Пусть известно решение $\varphi^*(t)$ уравнения (2.5.47). *Предположим, что существуют аналитические функции $q(s)$ и $u(s)$ такие, что правые части уравнений* (2.5.47) *и* (2.5.48) *связаны формулой*

$$\Phi_1(s) = \Phi(q(s)) u(s). \tag{2.5.49}$$

Тогда уравнение (2.5.48) *имеет решение* $\varphi_1^*(t)$, *определяемое формулой*

$$\varphi_1^*(t) = \int_0^\infty \psi(t,\tau)\varphi^*(\tau)d\tau, \tag{2.5.50}$$

где функция $\psi(\tau,t)$ *является решением интегрального уравнения*

$$\int_0^\infty \psi(t,\tau)t^{s-1}dt = \tau^{q(s)-1}u(s). \tag{2.5.51}$$

Доказательство. Решение уравнения (2.5.47) определяется формулой обращения для преобразования Меллина:

$$\varphi^*(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Phi(s)t^{-s}ds. \tag{2.5.52}$$

Подставляя в (2.5.47) $q(s)$ вместо s, имеем

$$\Phi(q(s)) = \int_0^\infty \varphi^*(t)t^{q(s)-1}dt. \tag{2.5.53}$$

Применяя к (2.5.48) обратное преобразовнаие Меллина, получаем

$$\varphi_1^*(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Phi(q(s))u(s)t^{-s}ds. \tag{2.5.54}$$

Подставляя (2.5.53) в (2.5.54), получим, поменяв порядок интегрирования:

$$\varphi_1^*(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} t^{-s}\left(\int_0^\infty \tau^{q(s)-1}\varphi^*(\tau)d\tau\right)u(s)ds =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty \varphi^*(\tau)\left(\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \tau^{q(s)-1}t^{-s}u(s)ds\right)d\tau. \tag{2.5.55}$$

Положим

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} t^{-s}\tau^{q(s)-1}u(s)ds = \psi(t,\tau), \tag{2.5.56}$$

тогда

$$\int_0^\infty t^{s-1}\psi(t,\tau)dt = \tau^{q(s)-1}u(s). \tag{2.5.57}$$

Следовательно, уравнение (2.5.48) имеет решение

$$\varphi_1^*(t) = \int_0^\infty \psi(t,\tau)\varphi^*(\tau)d\tau. \tag{2.5.58}$$

Теорема доказана.

Отметим, что справедливо и обратное утверждение: если выполнено условие (2.5.51) и функция $\varphi^*(t)$ является решением уравнения (2.5.47), то функция $\varphi_1^*(t)$, определяемая равенством (2.5.50), является решением уравнения (2.5.48).

В самом деле,

$$\int_0^\infty t^{s-1}\varphi_1^*(t)dt = \int_0^\infty t^{s-1}\int_0^\infty \psi(t,\tau)\varphi^*(\tau)d\tau dt =$$

$$= \int_0^\infty \varphi^*(\tau)\left(\int_0^\infty t^{s-1}\psi(t,\tau)dt\right)d\tau =$$

$$= \int_0^\infty \varphi^*(\tau)\tau^{q(s)-1}u(s)d\tau =$$

$$= u(s)\int_0^\infty \varphi^*(\tau)\tau^{q(s)-1}d\tau = u(s)\Phi^*(q(s)),$$

т.е. $\Phi_1^*(s) = \Phi^*(q(s))u(s)$. Здесь $\Phi^*(s)$ и $\Phi_1^*(s)-$ преобразование Мелина функций $\varphi^*(t)$ и $\varphi_1^*(t)$.

Рассмотрим динамическую систему, описываемую интегральным уравнением

$$\int_0^\infty g(t,\tau)x(\tau)d\tau = f(t). \tag{2.5.59}$$

Здесь $x(t)$ – входной сигнал, $f(t)$ – выходной сигнал. Требуется восстановить функцию $g(t,\tau)$. Пусть функция $g(t,\tau)$ удовлетворяет следующему условию: существуют аналитические в области $\sigma_1 < s < \sigma_2$ функции $q(s)$ и $u(s)$ такие, что

$$\int_0^\infty t^{s-1}g(t,\tau)d\tau = \tau^{q(s)-1}u(s), \sigma_1 < s < \sigma_2. \tag{2.5.60}$$

Пусть $X(s)$ – преобразование Меллина функции $x(t)$; $F(s)$ – преобразование Меллина функции $f(t)$. Пусть эти преобразования связаны формулой $F(s) = X(q(s))u(s)$. Тогда функция $g(t,\tau)$ определяется формулой

$$g(t,\tau) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \tau^{q(s)-1}u(s)t^{-s}ds,\ \sigma_1 < \sigma < \sigma_2. \qquad (2.5.61)$$

Вычисляя интеграл в правой части формулы (2.5.61) по квадратурным формулам [8], получаем приближенное значение импульсной переходной функции.

Если функция $G(s,\tau)$ представима в виде $G(s,\tau) = \tau^{q(s)-1}G(s)$, то импульсная переходная функция восстанавливается по двум сигналам.

Действительно, обозначим преобразование Меллина функций $x(t)$ и $f(t)$ через $X(s)$ и $F(s)$ соответственно. Будем считать, что функции $q(s)$ и $G(s)$ аналитические при $\sigma_1 < s < \sigma_2$.

Пусть $x_1(t)$ и $x_2(t)$ – два линейно независимых входных сигнала, тогда

$$\int\limits_0^\infty g(t,\tau)x_i(\tau)d\tau = f_i(t),\ i = 1,2. \qquad (2.5.62)$$

Изображение системы интегральных уравнений (2.5.62) приводит к системе нелинейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} G(s)X_1(q(s)) = F_1(s), \\ G(s)X_2(q(s)) = F_2(s) \end{cases} \qquad (2.5.63)$$

с неизвестными функциями $G(s)$ и $q(s)$. Решая систему (2.5.63) относительно этих функций, находим $G(s)$ и $q(t)$. Функция $g(t,\tau)$ находится по формуле

$$g(t,\tau) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} t^{-s}G(s,\tau)ds.$$

Для вычисления последнего интеграла можно использовать различные вычислительные методы. Наиболее удобным является использование квадратурных формул [8].

2.5.1.4. Преобразование Хартли

Рассмотрим динамическую систему, описываемую уравнением

$$\int_0^{\infty} g(t,\tau)x(\tau)d\tau = f(t). \tag{2.5.64}$$

Рассмотрим интегральное преобразование Хартли [43]:

$$\Phi(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\mathrm{cas}(2\pi\lambda)dt. \tag{2.5.65}$$

Тогда обратное преобразование определяется формулой

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\lambda)\mathrm{cas}(2\pi\lambda)d\lambda, \tag{2.5.66}$$

где $\mathrm{cas}(t) \equiv \cos(t) + \sin(t)$.

Теорема 2.5.4. *Пусть функция $g(t,\tau)$ удовлетворяет условию*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t,\tau)\mathrm{cas}(2\pi\lambda t)dt = G(\lambda)\mathrm{cas}(2\pi q(\lambda)\tau), \tag{2.5.67}$$

где $G(\lambda)$, $q(\lambda)$ – функции из пространства $L_1(-\infty,\infty)$.
Тогда, преобразование (2.5.65) *уравнения* (2.5.64), *будет*

$$G(\lambda)X(q(\lambda)) = F(\lambda), \tag{2.5.68}$$

где $X(\lambda), F(\lambda)$ – преобразование Хартли функций $x(t), f(t)$.

Доказательство. Применяя интегральное преобразование (2.5.65) к уравнению (2.5.64) и используя условие (2.5.67), имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{cas}(2\pi\lambda t)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(t,\tau)x(\tau)d\tau\right)dt =$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{cas}(2\pi\lambda t)g(t,\tau)dt\right)d\tau =$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)G(\lambda)\mathrm{cas}(2\pi q(\lambda)\tau)d\tau = G(\lambda)X(q(\lambda)),$$

из этого выражения и учитывая, что $F(\lambda)$ есть преобразование Хартли функции $f(t)$, следует справедливость формулы (2.5.68).

Рассмотрим динамическую систему, описываемую уравнением (2.5.64), у которой $x(t)$ – входной сигнал, $f(t)$ – выходной сигнал, $g(t,\tau)$ – импульсная переходная функции, удовлетворяющая условию (2.5.67).

Требуется восстановить функцию $g(t,\tau)$.

Пусть $x_1(t)$ и $x_2(t)$ – два линейно независимых входных сигнала. Тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t,\tau)x_i(\tau)d\tau = f_i(t), i = 1,2. \tag{2.5.69}$$

Применяя интегральное преобразование Хартли к системе интегральных уравнений (2.5.69), получим систему нелинейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} G(\lambda)X_1(q(\lambda)) = F_1(\lambda), \\ G(\lambda)X_2(q(\lambda)) = F_2(\lambda) \end{cases} \tag{2.5.70}$$

с неизвестными функциями $G(\lambda)$ и $q(\lambda)$. Решая систему (2.5.70) относительно этих функций, находим $G(\lambda)$ и $q(t)$. Функция $g(t,\tau)$ может быть найдена применением преобразования, обратного преобразованию Хартли.

2.5.1.5. Многомерные системы

В данном разделе предложены методы идентификации многомерных непрерывных линейных динамических систем с распределеными параметрами по $n+1$ тестовому сигналу и методы параметрической идентификации систем с переменными параметрами.

Одной из математических моделей динамических систем с распределенными параметрами являются дифференциальные уравнения в частных производных [47]. Известно [47, 131], что решение дифференциального уравнения в частных производных можно выразить через функцию Грина в виде

$$y(x,t) = \int_{t_0}^{t} \int_{D} G(x,\xi,t,\tau)w(\xi,t)d\xi d\tau, \tag{2.5.71}$$

где t – переменная времени, $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in R_n$ и $D \subset R_n$; $w(\xi,\tau)$ – входной сигнал; $y(x,t)$ – выходной сигнал; $G(x,\xi,t,\tau)$ –

функция Грина, которая является импульсной переходной функцией или функцией влияния системы, которая описывается уравнением (2.5.71).

В случае, если система является инвариантной к сдвигу по переменой времени t, уравнение (2.5.71) принимает вид

$$y(x,t) = \int\limits_{t_0}^{t} \int\limits_{D} G(x,\xi,t-\tau)w(\xi,t)d\xi d\tau.$$

Если выходной сигнал не зависит от времени, то уравнение (2.5.71) принимает вид

$$y(x) = \int\limits_{D} G(x,\xi)w(\xi)d\xi.$$

В данном разделе рассматривается метод идентификации многомерных динамических систем с распределенными параметрами, описываемых уравнением

$$y(t,x_1,\cdots,x_n) =$$
$$= \int\limits_0^t \int\limits_0^{x_1} \cdots \int\limits_0^{x_n} g(t,\tau,x_1,\xi_1,\cdots,x_n,\xi_n)\omega(\tau,\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)d\tau d\xi_1 \cdots d\xi_n,$$

где $\omega(t,x_1,x_2,...,x_n)$, $y(t,x_1,x_2,...,x_n)$ – входной и выходной сигналы системы; $g(t,\tau,x_1,\xi_1,...,x_n\xi)$ – импульсная переходная функция.

Алгоритм идентификации основан на следущем утверждении.

Теорема 2.5.5. *Пусть изображение Лапласа импульсной переходной функции $g(t_1,t_2,\ldots,t_n,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_n)$ по переменным $t_1,t_2,\ldots,t_n$ удовлетворяет условию*

$$G(p_1,...,p_n,\tau_1,...,\tau_n) =$$
$$= \int\limits_0^\infty \cdots \int\limits_0^\infty g(t_1,\ldots,t_n,\tau_1,\ldots,\tau_n)e^{-(p_1t_1+\ldots+p_nt_n)}dt_1\ldots dt_n =$$
$$= \hat{G}(p_1,\ldots,p_n)e^{-(\tau_1q_1(p_1)+\ldots+\tau_nq_n(p_n))}, \qquad (2.5.72)$$

где $\hat{G}(p_1,\ldots,p_n), q_1(p_1),\ldots,q_n(p_n)$ – аналитические функции в правых полуплоскостях, удовлетворяющих неравенствам

$$\mathrm{Re}p_k > \sigma, \quad k = 1,2,...,n.$$

Тогда многомерное преобразование Лапласа по переменным $t_1, t_2, ..., t_n$ *уравнения*

$$y(t_1, \ldots, t_n) =$$

$$= \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty g(t_1, \ldots, t_n, \tau_1, \ldots, \tau_n) x(\tau_1, \ldots, \tau_n) d\tau_1 \ldots d\tau_n \qquad (2.5.73)$$

будет иметь вид

$$Y(p_1, ..., p_n) = \hat{G}(p_1, ..., p_n) X(q_1(p_1), ..., q_n(p_n)), \qquad (2.5.74)$$

где функция $Y(p_1, ..., p_n)$ *– изображение Лапласа функции* $y(t_1, ..., t_n)$ *и* $X(p_1, ..., p_n)$ *– изображение функции* $x(t_1, ..., t_n)$.

Замечание 2.5.5. *В векторы переменных* $t=(t_1, ..., t_n)$, $\tau=(\tau_1, ..., \tau_n)$ *могут входить независимые переменные любой природы.*

Доказательство. Найдем изображения уравнение (2.5.73) по переменным t_1, t_2,...,t_n:

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty y(t_1, \ldots, t_n) e^{-(p_1 t_1 + \cdots + p_n t_n)} dt_1 \ldots dt_n = \\ &= \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \left(\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty g(t_1, \ldots, t_n, \tau_1, \ldots, \tau_n) \times \right. \\ &\left. \times x(\tau_1, \ldots, \tau_n) e^{-(p_1 t_1 + \cdots + p_n t_n)} d\tau_1 \ldots d\tau_n \right) dt_1 \ldots dt_n. \end{aligned} \qquad (2.5.75)$$

Меняя порядок интегрирования в интеграле справа по совокупности переменных (t_1, t_2, ..., t_n) и (τ_1, τ_2, ..., τ_n), получим

$$\begin{aligned} Y(p_1, \ldots, p_n) &= \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty x(\tau_1, ..., \tau_n) \times \\ &\times \left(\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty g(t_1, \cdots, t_n, \tau_1, \ldots, \tau_n) \times \right. \\ &\left. \times e^{-(p_1 t_1 + \cdots + p_n t_n)} dt_1 \ldots dt_n \right) d\tau_1 \ldots d\tau_n = \\ = \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty x(\tau_1, ..., \tau_n) &\left(G(p_1, \ldots, p_n, \tau_1, \ldots, \tau_n) \right) d\tau_1 \ldots d\tau_n. \end{aligned} \qquad (2.5.76)$$

Учитывая условие (2.5.72), (2.5.76) примет вид

$$Y(p_1,\dots,p_n)=\hat{G}(p_1,...,p_n)\times$$
$$\times\int\limits_0^\infty\cdots\int\limits_0^\infty x(\tau_1,\dots,\tau_n)e^{-(\tau_1q_1(p_1)+\cdots+\tau_nq_n(p_n))}d\tau_1\dots d\tau_n. \tag{2.5.77}$$

Отсюда получаем равенство

$$Y(p_1,\dots,p_n)=\hat{G}(p_1,\dots,p_n)X(q_1(p_1),...,q_n(p_n)). \tag{2.5.78}$$

Следствие. Пусть система описывается уравнением

$$y(t,x_1,\dots,x_n)=\int\limits_0^t\int\limits_0^{x_1}\cdots\int\limits_0^{x_n}g(t,\tau,x_1,\xi_1,\dots,x_n,\xi_n)\times \tag{2.5.79}$$
$$\times\omega(\tau,\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)d\tau d\xi_1\dots d\tau_n,$$

где $\omega(t,x_1,x_2,\dots,x_n), y(t,x_1,x_2,\dots,x_n)$ – входной и выходной сигналы системы; $g(t,\tau,x_1,\xi_1,\dots,x_n,\xi_n)$ – импульсная переходная функция; t – переменная времени.

Импульсная переходная функция $g(t,\tau,x_1,\xi_1,\dots,x_n,\xi_n)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) условию физической реализуемости:

$$g(t,\tau,x_1,\xi_1,...,x_n,\xi_n)=0 \text{ при } (t,\tau,x_1,\xi_1...,x_n,\xi_n)\subset D,$$
$$\text{где } D=\{(t,\tau,...,x_1,\xi_1,...,x_n,\xi_n): \tag{2.5.80}$$
$$0\le\tau<t,0<\xi_1<x_1,...,0<\xi_n<x_n,\};$$

2) преобразование Лапласа импульсной переходной функции $g(t,\tau,x_1,\xi_1,...,x_n,\xi_n)$ по переменным $t,x_1,...,x_n$ удовлетворяет условию:

$$G(p,\tau,p_1,\xi_1,...,p_n,\xi_n)=$$
$$=\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty\cdots\int\limits_0^\infty g(t,\tau,x_1,\xi_1,...,x_n,\xi_n)\times \tag{2.5.81}$$
$$\times e^{-(pt+p_1x_1+...+p_nx_n)}dtdx_1\cdots dx_n=$$
$$=\hat{G}(p,p_1,...,p_n)e^{-(\tau q(p)+\xi_1q_1(p_1)+...+\xi_nq_n(p_n))},$$

где $\hat{G}(p,p_1,...,p_n), q(p), q_1(p_1),...,q_n(p_n)$ – некоторые аналитические функции в области $\mathrm{Re}p_k>\sigma, k=1,2,...,n.$

Тогда изображение Лапласа уравнения (2.5.79) примет вид

$$Y(p,p_1,...,p_n)=\hat{G}(p,p_1,...,p_n)\Omega(q(p),q_1(p_1),...,q_n(p_n)), \tag{2.5.82}$$

где $Y(p, p_1, ..., p_n)$ – изображение Лапласа функции $y(t, x_1, ...t_n)$ и $\Omega(p, p_1, ..., p_n)$ – изображение функции $\omega(t, x_1, ..., t_n)$.

Постановка задачи. Требуется, по известным $n+1$ – входным сигналам $x_k(t_1, t_2, ..., t_n)$, $k = 1, 2, ..., n+1$ и соответствущим $n+1$ – выходным сигналам $y_k(t_1, t_2, ..., t_n)$, $k = 1, 2, ..., n+1$, определить импульсную переходную функцию системы (2.5.79).

Решение. При известных входных $x_k(t_1, t_2, ..., t_n)$, $k = 1, 2, ..., n+1$, сигналах и соответсвующих $y_k(t_1, t_2, ..., t_n)$, $k = 1, 2, ..., n+1$, выходных сигналах динамической системы (2.5.79), получим систему интегральных уравнений

$$y_k(t_1, ..., t_n) = \\ = \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_n} g(t_1, ..., t_n, \tau_1, ..., \tau_n) x_k(\tau_1, ..., \tau_n) d\tau_1 ... d\tau_n, \qquad (2.5.83) \\ k = 1, 2, ..., n+1,$$

относительно функции $g(t_1, ..., t_n, \tau_1, ..., \tau_n)$.

Пусть импульсная переходная функция $g(t_1, ..., t_n, \tau_1, ..., \tau_n)$ удовлетворяет условию (2.5.81); тогда изображением системы интегральных уравнений (2.5.83) будет система алгебраических уравнений

$$Y_k(p_1, ..., p_n) = \hat{G}(p_1, ..., p_n) X_k(q_1(p_1), ..., q_n(p_n)), \\ k = 1, 2, ..., n. \qquad (2.5.84)$$

Решая систему (2.5.84) относительно искомых функций $\hat{G}(p_1, ..., p_n)$, $q_1(p_1)$, ..., $q_n(p_n)$, найдем изображение импульсной перходной функции в виде

$$G(p_1, ..., p_n, \tau_1, ..., \tau_n) = \hat{G}(p_1, ..., p_n) e^{-(\tau_1 q_1(p_1) + ... + \tau_n q_n(p_n))}.$$

Импульсную переходную функцию определим как обратное преобразование Лапласа по переменным p_1, ..., p_n:

$$g(t_1, ..., t_n, \tau_1, ..., \tau_n) = \\ = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} ... \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \hat{G}(p_1, ..., p_n) e^{(t_1 p_1 - \tau_1 q_1(p_1) + ... + t_2 p_2 - \tau_n q_n(p_n))} dp_1 ... dp_n.$$

2.5.2. Дискретные системы

Рассматриваются методы восстановдения импульсной переходной функции линейных дискретных динамичесих систем. В ка-

честве математического аппарата построения методов идентификации используется Z-преобразование. Предложены методы идентификации одномерных динамических систем и методы идентификации многомерных систем, частный случай которых можно рассматривать как системы с распределенными параметрами.

2.5.2.1. Одномерные системы

Следуя [129], определим ИПФ $g(k,l)$ системы (4.2.8) с переменными коэффициентами выражением

$$y(k) = \sum_{l=0}^{\infty} g(k,l)x(l), k = 0,1,2,..., \tag{2.5.85}$$

где $x(k)$, $k = 0,1,2,...$, – входной сигнал; $y(k)$, $k = 0,1,2,...$, – выходной сигнал; $g(k,l)$ – импульсный отклик, удовлетворяющий условию физической реализуемости системы: $g(k,l) = 0$ при $l > k$ (отклик системы не может появиться раньше воздействия на систему), $k,l = 0,1,...$

Известно [14,129,158], что импульсный отклик систем с постоянными коэффициентами вида

$$\begin{gathered} a_n y(k+n) + a_{n-1} y(k+n-1) + ... + a_0 y(k) = x(k), \\ k = 0,1,\ldots \end{gathered} \tag{2.5.86}$$

при начальных условиях

$$y(0) = 0, y(1) = 0, ..., y(n-1) = 0 \tag{2.5.87}$$

определяется соотношением

$$y(k) = \sum_{l=0}^{\infty} g(k-l)x(l), k = 0,1,2,..., \tag{2.5.88}$$

где $x(k)$ – входной сигнал, k=0, 1, 2, ...; $y(k)$ – выходной сигнал, k=0, 1, 2, ...; $g(k)$ – импульсный отклик системы. Условие физической реализуемости системы в этом случае имеет вид: $g(k) = 0$ при $k < 0$, $k = 0,1,...$

Для определения импульсной переходной функции системы будем использовать Z-преобразование. Напомним, следуя [158], что Z-преобразование последовательности $f(k), k = 0,1,2,...$, имеет вид

$$Z[f(k)] = F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k},$$

где $F(z)$ – аналитическая функция, которая является главной частью ряда Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки.

Обратное Z-преобразование для функции $F(z)$ находится по формуле обращения [158]

$$f(k) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_C F(z) z^{k-1} dz,$$

где контур интегрирования содержит все особые точки функции $F(z)$.

Определение импульсной переходной функции основывается на следующем утверждении.

Обозначим через $X(z)$ и $Y(z)$ Z-преобразования последовательностей $\{x(k)\}$, $\{y(k)\}$, $k = 0, 1, ...$

Теорема 2.5.6. *Пусть последовательность* $\{g(k,l)\}$ *удовлетворяет следующему условию:*

Z-преобразование последовательности $\{g(k,l)\}$ *по переменной* k *имеет вид*

$$Z\left[g(k,l)\right] = \sum_{k=0}^{\infty} g(k,l) z^{-k} = \hat{G}(z) \left[q(z)\right]^{-l}, \; l = 0, 1, ..., \qquad (2.5.89)$$

где $\hat{G}(z), q(z)$ *– некоторые аналитические функции.*

Тогда Z-преобразование уравнения (2.5.85) *будет иметь вид*

$$Y(z) = \hat{G}(z) X\left(q(z)\right). \qquad (2.5.90)$$

Доказательство. Пусть выполнено условие (2.5.89). Найдем Z-преобразование выражения (2.5.85) при условии (2.5.89).

Имеем $Z\left[y(k)\right] = Z\left[\sum\limits_{l=0}^{\infty} g(k,l) x(l)\right] = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(\sum\limits_{l=0}^{\infty} g(k,l) x(l)\right) z^{-k},$
или, меняя порядок суммирования [157] по k и l, получим

$$Y(z) = \sum_{l=0}^{\infty} x(l) \left(\sum_{k=0}^{\infty} g(k,l) z^{-k}\right) =$$
$$= \hat{G}(z) \sum_{l=0}^{\infty} x(l) \left[q(z)\right]^{-l} = \hat{G}(z) X(q(z)),$$

т.е. справедливо (2.5.90).

Отметим, что данная теорема является аналогом теоремы Бореля для непрерывных систем, применение которой для идентификации непрерывных систем рассмотрено в разд. 2.5.1.1.

В качестве примера, иллюстрирующего применение теоремы 2.5.6, рассмотрим уравнение

$$y(k) = \sum_{l=0}^{\infty} a^{k-Nl} x(l), k = 0, 1, ..., \;\; N = \text{const}. \tag{2.5.91}$$

Нетрудно видеть, что по теореме смещения

$$Z(a^{k-Nl}) = z^{-Nl} Z(a^k) = \frac{z}{z-a}(z^N)^{-l} = \widehat{G}(z)(q(z))^{-l},$$

где $\widehat{G}(z) = \dfrac{z}{z-a}, \; q(z) = z^N.$

Применяя к уравнению (2.5.91) Z-преобразование, имеем

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{\infty} a^{k-Nl} x(l) \right) z^{-k} = \sum_{l=0}^{\infty} x(l) \sum_{k=0}^{\infty} a^{k-Nl} z^{-k} =$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} x(l)(z^N)^{-l} \frac{z}{z-a} = \frac{z}{z-a} \sum_{l=0}^{\infty} x(l)(q(z))^{-l} = \frac{z}{z-a} X(q(z)) =$$

$$= \widehat{G}(z) X(q(z)),$$

где $\widehat{G}(z) = \dfrac{z}{z-a}, \; q(z) = z^N.$

Постановка задачи определения импульсной переходной функции. Пусть выполнено условие (2.5.89). Требуется по двум входным $x_i(k)$, $i = 1, 2; k = 0, 1, 2, ...$, и соответствующим выходным сигналам $y_i(k)$, $i = 1, 2; k = 0, 1, 2, ...$, определить импульсную переходную функцию $g(k, l)$ системы, описываемой уравнением

$$y(k) = \sum_{l=0}^{\infty} g(k, l) x(l), k = 0, 1, 2, ... \tag{2.5.92}$$

Замечание 2.5.6. *Z-преобразование функции $g(k, l)$ по переменной k будем обозначать через $G(z, l)$.*

Решение. Пусть

$$X_i(z) = Z\left[x_i(k)\right] = \sum_{k=0}^{\infty} x_i(k) z^{-k}, i = 1, 2,$$

$$Y_i(z) = Z\left[y_i(k)\right] = \sum_{k=0}^{\infty} y_i(k) z^{-k}, i = 1, 2.$$

Учитывая условие (2.5.89) и применяя к (2.5.92) Z-преобразование, приходим к системе алгебраических уравнений относительно

функций $\hat{G}(z), q(z)$:

$$\begin{cases} \hat{G}(z)X_1\left(q(z)\right) = Y_1(z), \\ \hat{G}(z)X_2\left(q(z)\right) = Y_2(z). \end{cases} \tag{2.5.93}$$

Решая систему (2.5.93), находим искомые функции $\hat{G}(z), q(z)$, тогда $G(z,l)$ будет иметь вид

$$G(z,l) = \hat{G}(z)\left[q(z)\right]^{-l}.$$

Замечание 2.5.7. *Отметим, что в случае систем с постоянными коэффициентами, описываемых уравнением* (2.5.86) *с начальными условиями* (2.5.87), *имеем* (2.5.88). *Тогда Z-преобразование функции* $g(k,l)=g(k-l)$ *по переменной* k *имеет вид* $G(z)=\hat{G}(z)z^{-l}$, *т.е.* $q(z) = z$. *Поэтому для определения* $G(z,l)$ *в системах с постоянными коэффициентами достаточно одного входного и выходного сигналов.*

Импульсную переходную функцию $g(k,l)$ найдем как обратное Z-преобразование по формуле обращения [158]:

$$g(k,l) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C G(z,l)z^{k-1}dz = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C \hat{G}(z)\left[q(z)\right]^{-l} z^{k-1}dz, \quad k,l = 0,1,2,..., \tag{2.5.94}$$

где контур интегрирования содержит все особые точки функции $G(z,l) = \hat{G}(z)\left[q(z)\right]^{-l}$.

Отметим, что вычисление контурных интегралов в выражениях (2.5.94) является достаточно трудоемкой задачей. Для нахождения обратного Z-преобразования можно воспользоваться следующей вычислительной схемой [14], основанной на методе коллокаций.

Для этого, применяя метод редукции и учитывая физическую реализуемость импульсной переходной функции ($g(k,l)=0$ при $k<l$), уравнение (2.5.89) аппроксимируем следующим образом:

$$\sum_{k=l}^{N} g(k,l)z^{-k} = \hat{G}(z)\left[q(z)\right]^{-l}, \ l = 0,1,\ldots,N, \tag{2.5.95}$$

где N – достаточно большое число.

В уравнении (2.5.95) для каждого фиксированного значения $l = 0,1,2,...,N$ на окружности γ радиуса R ($\gamma = \{z, |z| = R\}$), в которой содержатся все особые точки функции $\hat{G}(z)\left[q(z)\right]^{-l}$, выбираем $N-l+1$ равноотстоящую точку z_ν, $\nu = 0,1,...,N-l$, и приравняем

левые и правые части уравнения (2.5.95) в этих точках. В результате приходим к $N+1$ системе линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{k=l}^{N} g(k,l) z_\nu^{-k} = \hat{G}(z_\nu) \left[q(z_\nu)\right]^{-l}, \nu = 0,1,...,N-l, \qquad (2.5.96)$$

где $l = 0, 1, \ldots, N$. Система (2.5.96) однозначно разрешима, так как определитель l-й системы $(N-l+1)$ порядка $(l=0,1,...,N)$, есть определитель Вандермонда [137], который равен

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{(z_0)^l} & \frac{1}{(z_0)^{l+1}} & \cdots & \frac{1}{(z_0)^N} \\ \frac{1}{(z_1)^l} & \frac{1}{(z_1)^{l+1}} & \cdots & \frac{1}{(z_1)^N} \\ . & . & \cdots & . \\ \frac{1}{(z_{N-l})^l} & \frac{1}{(z_{N-l})^{l+1}} & \cdots & \frac{1}{(z_{N-l})^N} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{(z_0 \cdots z_{N-l})^l} \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{z_0} & \cdots & \frac{1}{(z_0)^{N-l}} \\ 1 & \frac{1}{z_1} & \cdots & \frac{1}{(z_1)^{N-l}} \\ . & . & \cdots & . \\ 1 & \frac{1}{z_{N-l}} & \cdots & \frac{1}{(z_{N-l})^{N-l}} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{(z_0 \cdots z_{N-l})^l} \prod_{i>j} \left(\frac{1}{z_i} - \frac{1}{z_j}\right) \neq 0.$$

Решая систему (2.5.96) при каждом значении l=0, 1, ..., N, находим элементы последовательности $\{g(k,l)\}$, k=$l, l+1, ..., N$, l=0, 1, ..., N.

Примеры, иллюстрирующие применение данного метода, будут рассмотрены в разд. 4.2.2.

2.5.2.2. Многомерные системы

Расмотренный выше метод идентификации параметров непрерывных систем применим для дискретных систем, описываемых уранениями

$$y(k_1, ...k_n) =$$
$$= \sum_{m_1=0}^{k_1} \cdots \sum_{m_n=0}^{k_n} g(k_1, ..., k_n, m_1, ..., m_n) x(m_1, ..., m_n), \qquad (2.5.97)$$
$$k_1, ..., k_n = 0, 1, 2, ...,$$

где $x(k_1,\ldots,k_n), y(k_1,\ldots,k_n)$ – входной и выходной сигналы системы; $g(k_1,\ldots,k_n,m_1,\ldots,m_n)$, k_1, ..., $k_n = 0$, 1, 2, ...; m_1, ..., $m_n = 0$, 1, 2, ... – импульсная переходная функция.

Метод идентификации основан на следующем утверждении.

Теорема 2.5.7. *Пусть Z-преобразование импульсной переходной функции $g(k_1,\ldots,k_n,m_1,\ldots,m_n)$ по переменным $k_1,\ldots,k_n$ удовлетворяет условию*

$$\begin{gathered} G(z_1,...,z_n,m_1,...,m_n) = \\ = \sum_{k_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{k_n=0}^{\infty} g(k_1,\ldots,k_n,m_1,\ldots,m_n) z_1^{-k_1}\ldots z_n^{-k_n} = \\ = \hat{G}(z_1,\ldots,z_n)\left[q_1(z_1)\right]^{-m_1}\ldots\left[q_n(z_n)\right]^{-m_n}, \\ m_1,...,m_n = 0,1,2,..., \end{gathered} \tag{2.5.98}$$

где $\hat{G}(z_1,\ldots,z_n), q_1(z_1),\ldots,q_n(z_n)$ – функции аналитические в некоторой области Ω.

Тогда Z-преобразование уравнения

$$\begin{gathered} y(k_1,...k_n) = \sum_{m_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{m_n=0}^{\infty} g(k_1,...,k_n,m_1,...,m_n)\times \\ \times x(m_1,...,m_n),\ k_1,...,k_n = 0,1,2,... \end{gathered} \tag{2.5.99}$$

будет иметь вид

$$Y(z_1,\ldots,z_n) = \hat{G}(z_1,\ldots,z_n)X(q_1(z_1),...,q_n(z_n)), \tag{2.5.100}$$

где функция $Y(z_1,\ldots,z_n)$ – Z-преобразование последовательности $y(k_1,\ldots,k_n)$, $k_1,...,k_n = 0,1,2,...$ и $X(z_1,\ldots,z_n)$ – Z-преобразование последовательности $x(k_1,\ldots,k_n)$, $k_1,...,k_n = 0,1,2,....$

Доказательство. Найдем Z-преобразование уравнения (2.5.99) по переменным k_1, k_2,...,k_n:

$$\begin{gathered} \sum_{k_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{k_n=0}^{\infty} y(k_1,\ldots,k_n) z_1^{-k_1}\ldots z_n^{-k_n} = \\ = \sum_{k_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{k_n=0}^{\infty}\left(\sum_{m_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{m_n=0}^{\infty} g(k_1,\ldots,k_n,m_1,\ldots,m_n)\times\right. \\ \left.\times\, x(m_1,\ldots,m_n) z_1^{-k_1}\ldots z_n^{-k_n}.\right) \end{gathered} \tag{2.5.101}$$

Меняя порядок суммирования в правой части равенства, получим

$$\begin{gathered} Y(z_1,\ldots,z_n) = \sum_{m_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{m_n=0}^{\infty} x(m_1,...,m_n)\times \\ \times\left(\sum_{k_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{k_n=0}^{\infty} g(k_1,\ldots,k_n,m_1,\ldots,m_n) z_1^{-k_1}\ldots z_n^{-k_n}\right). \end{gathered} \tag{2.5.102}$$

Учитывая условие (2.5.98), имеем

$$Y(z_1,\dots,z_n)=\hat{G}(z_1,\dots,z_n)\times$$
$$\times\sum_{m_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{m_n=0}^{\infty}x(m_1,...,m_n)\,[q_1(z_1)]^{-m_1}\dots[q_n(z_n)]^{-m_n}. \qquad (2.5.103)$$

Доказана справедливость равенства

$$Y(z_1,\dots,z_n)=\hat{G}(z_1,\dots,z_n)X(q_1(z_1),...,q_n(z_n)). \qquad (2.5.104)$$

Следствие. Из данной теоремы и условия физической реализуемости импульсной переходной функции системы (2.5.97)

$$g(k_1,...,k_n,m_1,...,m_n)=0 \quad \text{при } m_1<k_1,...,m_n<k_n \qquad (2.5.105)$$

следует, что если импульсная переходная функция удовлетворяет условию (2.5.98) и условию физической реализуемости (2.5.105), то Z-преобразование уравнения (2.5.97) имеет вид (2.5.104)

$$Y(z_1,\dots,z_n)=\hat{G}(z_1,\dots,z_n)X(q_1(z_1),...,q_n(z_n)). \qquad (2.5.106)$$

Постановка задачи. Требуется, по известным $n+1$ входному сигналу $x_k(k_1,\dots,k_n),\ k=1,2,\dots,n+1$ и соответствущим $n+1$ выходным сигналам $y_k(k_1,\dots,k_n),\ k=1,2,\dots,n+1$, определить импульсную переходную функцию системы (2.5.97).

Решение. При известных входных $n+1$ сигналах $x_k(k_1,\ \dots,\ k_n),\ k_1,\ ...,\ k_n=0,1,2,...;\ k=1,2,\dots,n+1$ и соответсвующих $n+1$ выходных сигналах $y_k(k_1,\dots,k_n),\ k_1,...,k_n=0,1,2,...;\ k=1,2,\ \dots,n+1$ динамической системы (2.5.97), получим систему уравнений

$$y_k(k_1,...k_n)=$$
$$=\sum_{m_1=0}^{k_1}\cdots\sum_{m_n=0}^{k_n}g(k_1,...,k_n,m_1,...,m_n)x_k(m_1,...,m_n), \qquad (2.5.107)$$
$$k=1,2,...,n+1,\ \ k_1,...,k_n=0,1,2,...$$

относительно искомой импульсной переходной функции $g(k_1,\ \dots,\ k_n,m_1,\ \dots,\ m_n)$. Пусть функция $g(k_1,\ \dots,\ k_n,m_1,\ \dots,\ m_n)$ удовлетворяет условию (2.5.98); тогда Z-преобразованием системы уравнений (2.5.107) будет система алгебраических уравнений:

$$Y_k(z_1,\dots,z_n)=\hat{G}(z_1,\dots,z_n)X_k(q_1(z_1),...,q_n(z_n)),\quad k=1,2,...,n+1. \qquad (2.5.108)$$

Решая систему (2.5.108) относительно искомых функций $\hat{G}(z_1,...,z_n)$, $q_1(z_1)$, ..., $q_n(z_n)$, найдем Z-преобразование импульсной переходной функции в виде

$$\begin{gathered} G(z_1,...,z_n,m_1,...,m_n) = \\ = \hat{G}(z_1,...,z_n)\,[q_1(z_1)]^{-m_1}\dots[q_n(z_n)]^{-m_n}, \\ m_1,....,m_n = 0,1,2,.... \end{gathered} \tag{2.5.109}$$

Импульсную переходную функцию определим как обратное Z-преобразование по переменным z_1, ..., z_n:

$$\begin{gathered} g(k_1,...,k_n,m_1,...,m_n) = \\ = \frac{1}{(2\pi i)^n}\oint\limits_{C_1}\dots\oint\limits_{C_n}\hat{G}(z_1,...,z_n)\,[q_1(z_1)]^{-m_1}\dots[q_n(z_n)]^{-m_n}\times \\ \times z_1^{k_1-1}\dots z_n^{k_n-1}dz_1...dz_n, \\ k_1,...,k_n = 0,1,2,...; \\ m_1,....,m_n = 0,1,2,..., \end{gathered} \tag{2.5.110}$$

где каждый интеграл вычисляется по замкнутому контуру, лежащему в области сходимости функции $\hat{G}(z_1,...,z_n)\,[q_1(z_1)]^{-m_1}\cdots[q_n(z_n)]^{-m_n}$.

2.6. Приближенные методы идентификации линейных динамических систем

Предлагаются методы восстановления импульсной переходной функции, основанные на анализе реакции динамической системы на серию специально подобранных входных воздействий.

2.6.1. Идентификация систем по реакции на ступенчатые входные сигналы

Предлагается метод восстановления импульсных переходных функций линейных измерительных преобразователей с распределенными параметрами, описываемых уравнениями вида

$$\int\limits_0^t g(t,\tau)x(\tau)d\tau = f(t), 0 \le t \le T, \tag{2.6.1}$$

где $x(t)$ – входной, $f(t)$ – выходной сигналы.

Требуется, зная значения $N+1$ входного $x_k(t)$ и выходного $f_k(t)$ $(k = 1, \ldots, N+1)$ сигналов в промежутке времени $[0, T]$, определить импульсную переходную функцию $g(t,\tau)$ $(g(t,\tau) = 0$ при $\tau > t)$. В качестве входных сигналов берутся ступенчатые функции

$$x_k(t) = \begin{cases} 1, 0 \le t \le t_k, \\ 0, t_k \le t \le T, \end{cases} \quad k = 1, \ldots, N+1,$$

где узлы $t_k = \frac{Tk}{2(N+1)}$, $k = 1, \ldots, N+1$.

При подаче на вход сигнала $x_k(t)$, $k = 1, \ldots, N+1$, выходной сигнал равен

$$f_k(t) = \begin{cases} \int\limits_0^t g(t,\tau)d\tau \text{ при } 0 \le t \le t_k,\ k = 1, \ldots, N+1, \\ \int\limits_0^{t_k} g(t,\tau)d\tau \text{ при } t_k \le t \le T,\ k = 1, \ldots, N+1. \end{cases} \tag{2.6.2}$$

При $t \ge T/2$ это выражение будет отлично от нуля для всех $x_k(t)$, $k = 1, \ldots, N+1$. Приближенное представление функции $g(t,\tau)$ будем искать в виде

$$g(t,\tau) \approx g_N(t,\tau) = \sum_{k=0}^{N}\sum_{l=0}^{N} \alpha_{kl}\varphi_k(t)\varphi_l(\tau), \tag{2.6.3}$$

где $\{\varphi_k\}$ – линейно независмые функции на сегменте $[0, T]$.

Разложим выходной сигнал $f_m(t)$ в ряд по функциям $\varphi_k(t)$:

$$f_m(t) \approx \sum_{k=0}^{N} f_k^m \varphi_k(t), \quad m = 1, \ldots, N+1, \tag{2.6.4}$$

где f_k^m – коэффициенты разложения $f_m(t)$ по функциям $\varphi_k(t)$. Подставляя (2.6.3) и (2.6.4) в (2.6.1), получим систему уравнений

$$\sum_{k=0}^{N}\left(\sum_{l=0}^{N}\alpha_{kl}\int\limits_0^{t_m}\varphi_l(\tau)d\tau - f_k^m\right)\varphi_k(t) = 0,\ m = 1, \ldots, N+1,$$

из которых, приравнивая коэффициенты при линейно независимых функциях $\varphi_k(t)$, приходим к $N+1$ системе, каждая из которых состоит из $N+1$ уравнения

$$\begin{cases} \sum\limits_{l=0}^{N} \alpha_{0l} \int\limits_0^{t_k} \varphi_l(\tau)d\tau = f_0^k, \\ \sum\limits_{l=0}^{N} \alpha_{1l} \int\limits_0^{t_k} \varphi_l(\tau)d\tau = f_1^k, \\ \vdots \\ \sum\limits_{l=0}^{N} \alpha_{Nl} \int\limits_0^{t_k} \varphi_l(\tau)d\tau = f_N^k, \end{cases}$$
$$k = 1, \ldots, N+1.$$

Полагая в каждом уравнении предыдущей системы $k = 1, 2, \ldots, N+1$, получаем следующие $N+1$ системы:

$$AU_k = F_k, k = 1, \ldots, N+1, \tag{2.6.5}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} \int\limits_0^{t_1} \varphi_0(\tau)d\tau & \int\limits_0^{t_1} \varphi_1(\tau)d\tau & \ldots & \int\limits_0^{t_1} \varphi_N(\tau)d\tau \\ \int\limits_0^{t_2} \varphi_0(\tau)d\tau & \int\limits_1^{t_2} \varphi_1(\tau)d\tau & \ldots & \int\limits_1^{t_2} \varphi_N(\tau)d\tau \\ & & \vdots & \\ \int\limits_0^{t_{N+1}} \varphi_0(\tau)d\tau & \int\limits_0^{t_{N+1}} \varphi_1(\tau)d\tau & \ldots & \int\limits_0^{t_{N+1}} \varphi_N(\tau)d\tau \end{pmatrix};$$

$$U_k = \begin{pmatrix} \alpha_{k0} \\ \alpha_{k1} \\ \alpha_{k2} \\ \vdots \\ \alpha_{kN} \end{pmatrix}; F_k = \begin{pmatrix} f_k^0 \\ f_k^1 \\ f_k^2 \\ \vdots \\ f_k^N \end{pmatrix}, k = 1, \ldots, N+1.$$

Здесь U_k – вектор искомых коэффициентов; F_k – столбец свободных членов.

Из полученных систем найдем значения коэффициентов α_{kl} разложения (2.6.3).

Отметим, что все матрицы систем линейных уравнений (2.6.5) имеют один и тот же вид, что упрощает реализацию данного алгоритма.

Для реализации предложенного алгоритма требуется:

1) выбрать систему базисных функций $\varphi_k(t)$;

2) найти коэффициенты разложения каждого из выходных сигналов f_k^m по системе базисных функций $\varphi_k(t)$;

3) решить $N+1$ систему линейных уравнений (2.6.5).

Для примера в качестве базисных функций возьмем $\varphi_k(t) = t^k$. Тогда матрица A имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} t_1 & \dfrac{t_1^2}{2} & \cdots & \dfrac{t_1^{N+1}}{N+1} \\ t_2 & \dfrac{t_2^2}{2} & \cdots & \dfrac{t_2^{N+1}}{N+1} \\ & & \vdots & \\ t_{N+1} & \dfrac{t_{N+1}^2}{2} & \cdots & \dfrac{t_{N+1}^{N+1}}{N+1} \end{pmatrix}.$$

Определитель последней есть определитель Вандермонда. Следовательно, в данном случае система линейных уравнений (2.6.5) однозначно разрешима. Алгоритмы разложения выходного сигнала по степеням t приведены в разд. 1.10.

Замечание 2.6.1. *В качестве базисных функций можно взять, например, функции Хаара или вейвлет-функции.*

Пример 2.6.1. Рассмотрим преобразователь, описываемый уравнением (2.6.1), где

$$g(t,\tau) = \begin{cases} \tau(t-\tau)(T-t)(1+t)e^{-\tau}, & \tau \le t, \\ 0, & \tau > t. \end{cases}$$

Требуется определить ИПФ.

Решение. Идентификацию $g(t,\tau)$ будем проводить, аппроксимируя функцию $g(t,\tau)$ отрезком ряда Тейлора $g(t,\tau) = \sum\limits_{k=0}^{N}\sum\limits_{l=0}^{N} \alpha_{kl} t^k \tau^l$ и подавая на вход последовательно сигналы

$$x_k(t) = \begin{cases} 1, 0 \le t \le t_k, \\ 0, t_k \le t \le T, \end{cases}$$
$$k = 1, \ldots, N+1;$$
$$t_k = \frac{Tk}{2(N+1)},\ k = 1, \ldots, N+1.$$

При реализации вычислительной схемы (2.6.5) полагаем N=10, T=6. Результаты восстановления приведены в табл. 2.3 – точные значения, в табл. 2.4 – приближенные значения, в табл. 2.5 – погрешность.

Таблица 2.3. Точные значения функции $g(t,\tau)$ модельного примера 2.6.1

t_k \ t_l	0.6	1.2	1.8	2.4	3.0	3.6	4.2	4.8	5.4
0.6	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1.2	2.086	0	0	0	0	0	0	0	0
1.8	4.647	2.55	0	0	0	0	0	0	0
2.4	7.255	5.309	2.185	0	0	0	0	0	0
3.0	9.483	7.807	4.285	1.568	0	0	0	0	0
3.6	10.91	9.577	5.913	2.884	0.9894	0	0	0	0
4.2	11.1	10.15	6.684	3.668	1.678	0.5524	0	0	0
4.8	9.626	9.056	6.213	3.637	1.871	0.8215	0.263	0	0
5.4	6.069	5.829	4.113	2.508	1.377	0.6799	0.2902	0.091	0
6.0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Таблица 2.4. Приближенные значения функции $g(t,\tau)$ модельного примера 2.6.1

t_k \ t_l	0.6	1.2	1.8	2.4	3.0	3.6	4.2	4.8	5.4
0.6	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1.2	2.086	0	0	0	0	0	0	0	0
1.8	4.647	2.55	0	0	0	0	0	0	0
2.4	7.255	5.309	2.185	0	0	0	0	0	0
3.0	9.483	7.807	4.285	1.568	0	0	0	0	0
3.6	10.91	9.577	5.913	2.884	0.9895	0	0	0	0
4.2	11.1	10.15	6.684	3.668	1.678	0.5584	0	0	0
4.8	9.626	9.056	6.213	3.637	1.871	0.8225	0.3563	0	0
5.4	6.069	5.829	4.113	2.508	1.377	0.6788	0.3181	0.199	0
6.0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Из приведенных в таблицах результатов видно, что погрешность восстановления увеличивается к концу сегмента. Это связано с тем, что решение ищется в виде отрезков ряда Тейлора. С увеличением степени полинома точность восстановления увеличивается. В этом случае обусловленность системы линейных уравнений (2.6.5) ухудшается и для ее решения нужно использовать регуляризующие алгоритмы. Один из таких алгоритмов рассмотрен в первой главе.

Точность данного метода можно увеличить за счет подбора функций $\varphi_k(t)$. Следует отметить, что для этого не нужно заново подавать на вход системы входные сигналы.

Таблица 2.5. Погрешность восстановления функции $g(t,\tau)$ модельного примера 2.6.1

t_k \ t_l	0.6	1.2	1.8	2.4	3.0	3.6	4.2	4.8	5.4
0.6	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1.2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1.8	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2.4	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3.0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3.6	0	0	0	0	0.0001	0	0	0	0
4.2	0	0	0	0	0	0.006	0	0	0
4.8	0	0	0	0	0	0.001	0.093	0	0
5.4	0	0	0	0	0	0.0011	0.0279	0.108	0
6.0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Предложенный метод позволяет определить импульсную переходную функцию в том случае, если значения выходного сигнала известны только по истечению некоторого времени с момента воздействия на систему.

2.6.2. Использование квадратурных формул при идентификации систем

Предложен метод восстановления ИПФ измерительных преобразователей с распределенными параметрами, описываемых интегральными уравнениями вида

$$\int_0^t g(t,\tau)x(\tau)d\tau = f(t), \quad 0 \le t \le T, \tag{2.6.6}$$

по реакции на ступенчатые сигналы. Здесь $g(t,\tau)$ – импульсная переходная функция, подлежащая восстановлению; $x(t)$ – входной сигнал; $f(t)$ – выходной сигнал.

2.6.3. Метод восстановления непрерывной функции

Метод восстановления функции $g(t,\tau)$ состоит в следующем. Обозначим через $x_k(t)$ ступенчатые функции

$$x_k(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t \le t_{k+1} - h, \\ 1, & t_{k+1} - h < t \le T, \end{cases} \tag{2.6.7}$$

$k = 0, 1, \ldots, N-1$, где $h = \frac{T}{2N}$, $t_k = \frac{Tk}{N}, k = 0, 1, \ldots, N$. Через $f_k(t)$ обозначим реакцию преобразователя (2.6.6) на входной сигнал $x_k(t)$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$.

Подадим на вход измерительного преобразователя (2.6.6) сигнал $x_0(t)$. Тогда в момент времени t_1

$$\int_0^{t_1} g(t_1, \tau) x_0(\tau) d\tau = f_0(t_1). \tag{2.6.8}$$

Заменяя интеграл в (2.6.8) квадратурными формулами правых прямоугольников с шагом h, имеем

$$hg(t_1, t_1) x_0(t_1) + hg\left(t_1, \frac{t_1}{2}\right) x_0\left(\frac{t_1}{2}\right) = f_0(t_1).$$

Будем считать, что известны значения сигналов $f_k(t)$ в узлах t_l, $k = 0, 1, \ldots, N-1$, $l = 1, 2, \ldots, N$. Отсюда следует (из определения функции $x_0(t)$), что $hg(t_1, t_1) = f_0(t_1)$, т.е. $g(t_1, t_1) = \frac{f_0(t_1)}{h}$.

Аналогично, подавая на вход преобразователя сигналы $x_k(t)$ и проводя аналогичные преобразования с уравнениями

$$\int_0^{t_{k+1}} g(t_{k+1}, \tau) x_k(\tau) d\tau = f_k(t_{k+1}), k = 1, 2, \ldots, N-1,$$

имеем $g(t_{k+1}, t_{k+1}) = \frac{f_k(t_{k+1})}{h}, k = 1, 2, \ldots, N-1$.

В результате этих действий оказались вычисленными значения $g(t_k, t_k)$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$. Здесь мы полагаем, что $g(0, 0) = 0$. Отметим при этом, что значение $g(0, 0)$ нигде ниже не используется.

Вернемся к реакции преобразователя (2.6.6) на входной сигнал $x_0(t)$ в момент времени t_2:

$$\int_0^{t_2} g(t_2, \tau) x_0(\tau) d\tau = f_0(t_2). \tag{2.6.9}$$

По квадратурным формулам правых прямоугольников уравнение (2.6.9) аппроксимируем следующим уравнением:

$$hg(t_2, t_1) + 2hg(t_2, t_2) = f_0(t_2).$$

Отсюда $g(t_2, t_1) = \dfrac{f_0(t_2)}{h} - 2g(t_2, t_2)$.

Для нахождения значений $g(t_3, t_2)$ поступаем следующим образом. В начале, воспользовавшись данными о реакции преобразователя (2.6.6) на входной сигнал $x_1(t)$, аппроксимируем уравнение

$$\int_0^{t_3} g(t_3, \tau) x_1(\tau) d\tau = f_1(t_3)$$

приближенным уравнением

$$2hg(t_3, t_3) + hg(t_3, t_2) = f_1(t_3).$$

Отсюда $g(t_3, t_2) = \dfrac{f_1(t_3)}{h} - 2g(t_3, t_3)$.

После этого, воспользовавшись данными о реакции преобразователя (2.6.6) на входной сигнал $x_0(t)$, аппроксимируем уравнение

$$\int_0^{t_3} g(t_3, \tau) x_0(\tau) = f_0(t_3)$$

приближенным уравнением

$$2hg(t_3, t_3) + 2hg(t_3, t_2) + hg(t_3, t_1) = f_0(t_3).$$

Отсюда $g(t_3, t_1) = \dfrac{f_0(t_3)}{h} - 2g(t_3, t_3) - 2g(t_3, t_2)$.

Продолжая этот процесс, последовательно находим значения $g(t_k, t_l)$, $k, l = 1, 2, \ldots, N-1$. В результате по реакции преобразователя (2.6.6) на N входных сигналов функция $g(t, \tau)$ приближенно восстанавливается в $\dfrac{N^2}{2}$ узлах.

Проиллюстрируем описанный метод примером.

Пример 2.6.2. Рассмотрим измерительный преобразователь (2.6.6), где $g(t, \tau) = \tau(T - t)(t - \tau)(1 + t)e^{-\tau}, 0 \le \tau \le t \le T$, $T = 6$.

Требуется определить импульсную переходную функцию $g(t, \tau)$ измерительного преобразователя, функционирование которого описывается уравнением (2.6.6).

Решение. Результаты восстановления функции $g(t, \tau)$ по описанному выше алгоритму приведены в табл. 2.6 – 2.8, причем в табл. 2.6 даны точные значения, в табл. 2.7 – приближенные значения, и в табл. 2.8 – погрешность.

Таблица 2.6. Точные значения функции $g(t,\tau)$ модельного примера 2.6.2

t_k \ t_l	0.6	1.2	1.8	2.4	3.0	3.6	4.2	4.8	5.4
0.6	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1.2	2 .086	0	0	0	0	0	0	0	0
1.8	4.647	2.55	0	0	0	0	0	0	0
2.4	7.255	5.309	2.185	0	0	0	0	0	0
3.0	9.483	7.807	4.285	1.568	0	0	0	0	0
3.6	10.91	9.577	5.913	2.884	0.9894	0	0	0	0
4.2	11.1	10.15	6.684	3.668	1.678	0.5524	0	0	0
4.8	9.626	9.056	6.213	3.637	1.871	0.8215	0.2631	0	0
5.4	6.069	5.829	4.113	2.508	1.377	0.6799	0.2902	0.091	0
6.0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Таблица 2.7. Точные значения функции $g(t,\tau)$ модельного примера 2.6.2

t_k \ t_l	0.6	1.2	1.8	2.4	3.0	3.6	4.2	4.8	5.4
0.6	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1.2	2.086	0	0	0	0	0	0	0	0
1.8	4.647	2.55	0	0	0	0	0	0	0
2.4	7.255	5.309	2.185	0	0	0	0	0	0
3.0	9.483	7.807	4.285	1.568	0	0	0	0	0
3.6	10.91	9.577	5.913	2.884	0.9895	0	0	0	0
4.2	11.1	10.15	6.684	3.668	1.678	0.5562	0	0	0
4.8	9.626	9.056	6.213	3.637	1.871	0.8245	0.2643	0	0
5.4	6.069	5.829	4.113	2.508	1.377	0.6891	0.2881	0.099	0
6.0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Таблица 2.8. Погрешность восстановления функции $g(t,\tau)$ модельного примера 2.6.2

t_k \ t_l	0.6	1.2	1.8	2.4	3.0	3.6	4.2	4.8	5.4
0.6	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1.2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1.8	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2.4	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3.0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3.6	0	0	0	0	0.0001	0	0	0	0
4.2	0	0	0	0	0	0.0038	0	0	0
4.8	0	0	0	0	0	0.0030	0.0012	0	0
5.4	0	0	0	0	0	0.0092	0.0021	0.108	0
6.0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Из приведенных таблиц видно, что происходит накопление погрешности по мере их заполнения.

Из оценок погрешности квадратурных формул следует, что вблизи окрестности диагонали $t = \tau$ погрешность восстановления функции $g(t,\tau)$ есть величина $O(\frac{1}{n})$, а затем оценка погрешности увеличивается из-за накопления погрешности вычислений, причем при определении значения $g(T,0)$ она имеет порядок $O(1)$. Эта теоретическая оценка значительно завышена по сравнению с реальной, но получить лучшую теоретическую детерминированную оценку погрешности невозможно, так как вычисления ведутся последовательно и на каждом шаге (а их всего N) приходится учитывать максимальные значения оценок погрешностей всех ранее вычисленных значений $g(t_k,t_k)$, $g(t_k,t_{k-1}),\ldots,$ $g(t_k,t_1)$, $k = 2,3,\ldots,N$.

2.6.4. Метод восстановления функции $g(t,\tau)$, принадлежащей классу $W^{r,r}(M), r \geq 3$

Обозначим через $W^{r,r}(M)$ класс функций $\varphi(t_1,t_2)$, определенных в области $D = [0,T]^2$, имеющих в области D частные производные вида $\frac{\partial^v \varphi}{\partial {t_1}^{v_1} \partial {t_2}^{v_2}}$, $i = 1,2, v = 1,2,\ldots,r$, $v = (v_1,v_2)$, $0 \leq v_i \leq v$, $i = 1,2$, причем все частные производные до r-го порядка в области D ограничены по модулю константой M.

Метод восстановления состоит в следующем. Для определенности положим $r = 3$.

Обозначим через $x_k^*(t)$ ступенчатые функции

$$x_k^*(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq t_{k+1} - h^*, \\ 1, & t_{k+1} - h^* < t \leq T, \end{cases} \quad k = 0,1,...,N-1, \quad t_k = \frac{Tk}{N},\ k = 0,1,...,N-1. \tag{2.6.10}$$

Положим $h^* = h^2$. Отметим, что возможно и другое определение h^*. Это очевидно из дальнейшего текста.

Подадим на вход измерительного преобразователя (2.6.6) сигнал $x_0^*(t)$. Тогда в момент времени t_1 имеем

$$\int\limits_{t_1-h^*}^{t_1} g(t_1,\tau) x_0^*(\tau) d\tau = f_0^*(t_1). \tag{2.6.11}$$

Заменяя интеграл в (2.6.11) квадратурной формулой правых прямоугольников с шагом h^*, имеем

$$h^* g(t_1,t_1) + \varepsilon_{11} = f_0^*(t_1), \tag{2.6.12}$$

где ε_{11} – погрешность используемой квадратурной формулы. Так как $g(t,\tau) \in W^{r,r}(M), r \geq 1$, то $|\varepsilon_{11}| \leq \frac{M}{2}h^{*2}$ [123].

Следовательно, значение $g(t_1,t_1)$ определяется из (2.6.12) по формуле $g(t_1,t_1) = \frac{f_0^*(t_1)}{h^*}$ с точностью $\varepsilon_{11}^* \leq \frac{Mh^*}{2}$.

Аналогичным образом, подавая на вход преобразователя сигналы $x_k^*(t)$, $k = 1,2,\ldots,N-1$, определяем $g(t_k,t_k)$ по формуле

$$g(t_{k+1},t_{k+1}) = \frac{f_k(t_{k+1})}{h^*}$$

с точностью $|\varepsilon_{k,k}^*| \leq \frac{Mh^*}{2}$.

После того как вычислены значения $g(t_k,t_k)$, $k = 1,2,\ldots,N-1$, приступим к вычислению значений $g(t_k,t_l)$, $k = 1,2,\ldots,N-1, l = 1,\ldots,k-1$.

Подадим на вход преобразователя измерительного преобразователя, описываемого уравнением (2.6.6) последовательность сигналов следующего вида:

$$\begin{gathered} x_k^{**}(t) = \begin{cases} 1, & t_k \leq t \leq T, \\ 0, & 0 < t < t_k, \end{cases} \\ k = 0,1,\ldots,N-1, \\ t_k = \frac{Tk}{N}, k = 0,1,\ldots,N-1. \end{gathered} \tag{2.6.13}$$

Значение $g(t_k,t_l)$ вычисляются последовательно.

Вначале вычислим значение $g(t_1,t_0)$. Для этого воспользуемся реакцией преобразователя на входной сигнал $x_0^{**}(t)$ в момент времени t_1:

$$\int_0^{t_1} g(t_1,\tau)x_0^{**}(\tau)d\tau = f_0^{**}(t_1).$$

Вычисляя интеграл по формуле трапеций, имеем

$$hg(t_1,t_0) + hg(t_1,t_1) + \varepsilon_{10} = f_0^{**}(t_1).$$

Здесь ε_{10} – погрешность формулы трапеций. Известно, что $|\varepsilon_{10}| \leq \frac{2Mh^3}{3}$.

Таким образом, значение $g(t_1,t_0)$ вычисляется по формуле

$$g(t_1,t_0) = \frac{f_0^{**}(t_1)}{h} - g(t_1,t_1)$$

с точностью $|\varepsilon_{10}^*| \leq \frac{2Mh^2}{3} + \frac{Mh^*}{2}$.

Аналогичным образом вычисляется $g(t_2, t_1)$. Для вычисления $g(t_2, t_0)$ используется реакция преобразователя (2.6.6) на входной сигнал $x_0^{**}(t)$ в момент времени t_2

$$\int_0^{t_2} g(t_2, \tau) x_0^{**}(\tau) d\tau = f^{**}(t_2).$$

Здесь интеграл вычисляется по квадратурной формуле Симпсона и $g(t_2, t_0)$ определяется из формулы

$$\frac{t_2}{6} [g(t_2, t_0) + 4g(t_2, t_1) + g(t_2, t_2)] + \varepsilon_{20} = f^{**}(t_2),$$

где $|\varepsilon_{20}| \leq \frac{t_2^5}{2880} \max\limits_{0 \leq \tau \leq t_2} \left| \frac{\partial^4 g(t_2, \tau)}{\partial \tau^4} \right|$.

Отсюда следует, что $g(t_2, t_0)$ определяется по формуле

$$g(t_2, t_0) = 6 \frac{f^{**}(t_2)}{t_2} - 4g(t_2, t_1) - g(t_2, t_2)$$

с точностью

$$|\varepsilon_{20}^*| \leq |\varepsilon_{20}| + 4|\varepsilon_{21}^*| + |\varepsilon_{22}|.$$

Не останавливаясь на промежуточных вычислениях значений $g(t_3, t_2)$,..., $g(t_4, t_3)$, ..., опишем процесс последовательног вычисления значений $g(t_N, t_{N-1})$, ..., $g(t_N, t_0)$.

Для вычисления значения $g(t_N, t_{N-1})$ подадим на вход преобразователя (2.6.6) сигнал $x_{N-1}^{**}(t)$ и, повторяя приведенные выше выкладки, вычислим значения $g(t_N, t_{N-1})$ по формуле

$$g(t_N, t_{N-1}) = \frac{f_0^{**}(t_N)}{h} - g(t_N, t_N)$$

с точностью

$$|\varepsilon_{N,N-1}^*| \leq \frac{2Mh^2}{3} + \frac{Mh^{**}}{2}.$$

Для вычисления значения $g(t_N, t_{N-2})$ подадим на вход преобразователя сигнал $x_{N-2}^{**}(t)$ и воспользуемся уравнением

$$\int_{t_{N-2}}^{t_N} g(t_N, \tau) x_{N-2}^{**}(\tau) d\tau = f_{N-2}^{**}(t_N).$$

Вычисляя здесь интеграл по формуле Симпсона, имеем

$$\frac{h}{3}g(t_N,t_{N-2})+\frac{4h}{3}g(t_N,t_{N-1})+\frac{h}{3}g(t_N,t_N)+\varepsilon_{N,N-2}= \\ =f^{**}_{N-2}(t_N), \tag{2.6.14}$$

где $|\varepsilon_{N,N-2}| \le \frac{(2h)^5}{2880}M$. Из формулы (2.6.14) следует, что значение $g(t_N,t_{N-2})$ вычисляется по формуле

$$g(t_N,t_{N-2}) = \frac{f^{**}_{N-2}(t_N)}{h} - 4g(t_N,t_{N-1}) - g(t_N,t_{N-2})$$

с точностью $|\varepsilon^*_{N,N-2}| \le \frac{8Mh^2}{3} + 3Mh^{**}$.

Значение $g(t_N,t_{N-3})$ вычисляется при подаче на вход сигнала $x^{**}_{N-3}(t)$ из уравнения

$$\int\limits_{t_{N-3}}^{t_N} g(t_N,\tau)d\tau = f^{**}_{N-3}(t_N). \tag{2.6.15}$$

Интеграл в левой части (2.6.15) может быть вычислен двумя способами.

Во-первых, он может быть представлен в виде суммы двух интегралов $\int\limits_{t_{N-3}}^{t_{N-1}} g(t_N,\tau)d\tau + \int\limits_{t_{N-1}}^{t_N} g(t_N,\tau)d\tau$, и для вычисления которых к первому интегралу применяется формула Симпсона, а ко второму – квадратурная формула правых прямоугольников. В результате имеем

$$\frac{2}{3}h\left[g(t_N,t_{N-3}) + 4g(t_N,t_{N-2}) + g(t_N,t_{N-1})\right] + 2hg(t_N,t_N)+ \\ +\varepsilon_{N,N-3} = f^{**}(t_{N-3}),$$

где $\varepsilon_{N,N-3}$ складывается из погрешности формул прямоугольников и Симпсона и оценивается неравенством

$$|\varepsilon_{N,N-3}| \le 2Mh^2 + \frac{(4h)^5}{2880}\max_{t_{N-3}\le\tau\le t_{N-1}}\left|\frac{\partial^4 g(t_2,\tau)}{\partial\tau^4}\right|.$$

Следовательно, $g(t_N,t_{N-3})$ вычисляется по формуле

$$g(t_N,t_{N-3}) = \frac{3}{2}\frac{f^{**}(t_{N-3})}{h} - 3g(t_N,t_N) - 4g(t_N,t_{N-2}) - g(t_N,t_{N-1})$$

с точностью

$$|\varepsilon^*_{N,N-3}| \le 2Mh^2 + \frac{16}{45}Mh^5 + 3|\varepsilon^*_{N,N}| + 4|\varepsilon^*_{N,N-2}| + |\varepsilon^*_{N,N-1}|.$$

Во-вторых, для вычисления $g(t_N, t_{N-3})$ может быть использована квадратурно-интерполяционная формула.

Так как узлы равноотстоящие, то [149] константа Лебега λ_n равна $\lambda_n = n$.

Для вычисления $g(t_N, t_{N-3})$ используем формулу

$$\int_{t_{N-3}}^{t_N} L_n(g,\tau)d\tau + \varepsilon_{N,N-3} = f^*_{N-3}(t_N). \qquad (2.6.16)$$

Здесь $L_n(g,\tau) = \sum_{k=0}^{3} g(t_N, t_{N-3+k})\psi_{N-3+k}(\tau)$, $\psi_{N-3+k}(\tau)$ – фундаментальные полиномы по узлам t_{N-3+k}, $k = 0, 1, 2, 3$.

Вычислив в (2.6.16) интеграл, легко определить $g(t_N, t_{N-3})$ и оценить погрешность вычисления.

Дальнейшие вычисления значений $g(t_N, t_{N-4}), \ldots, g(t_N, t_0)$ проводятся аналогично или используются формулы прямоугольников и Симпсона в различных сочетаниях, или используется квадратурная формула интерполяционного типа.

В первом случае предполагается, что функция $g(t,\tau)$ имеет по переменной τ производные до четвертого порядка. В этом случае можно показать, что погрешность восстановления имеет порядок Ch, где C – константа.

Во втором случае можно показать, что погрешность восстановления имеет порядок Ch^{r-2}, где C – константа, r – число частных производных по переменной τ функции $g(t,\tau)$ на сегменте $[0,T]$, используемых при построении алгоритма.

Замечание 2.6.2. *Константа C не вычисляется в явном виде, так как она зависит от константы M из определения класса функции $W^{r,r}(M)$. Последняя константа неизвестна, и поэтому точное вычисление константы C, зависящей от M, r, T, не имеет большого практического значения.*

Пример 2.6.3. Рассмотрим измерительный преобразователь (2.6.6), где $g(t,\tau) = \tau(T-t)(t-\tau)(1+t)e^{-\tau}, 0 \le \tau \le t \le T$, $T = 6$.

Требуется определить ИПФ.

Решение. Результаты восстановления функции $g(t,\tau)$ приведены в табл. 2.9 –2.11

Сравнивая табл. 2.8 и табл. 2.11, можно отметить, что погрешность восстановления во втором случае намного меньше. Применяя другие квадратурные формулы, можно увеличить точность

восстановления, но в этом случае увеличивается объем вычислений, а следовательно, и время восстановления.

Таблица 2.9. Точные значения функции $g(t,\tau)$ примера 2.6.3

t_k \ t_l	0.6	1.2	1.8	2.4	3.0	3.6	4.2	4.8	5.4
0.6	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1.2	2 .086	0	0	0	0	0	0	0	0
1.8	4.647	2.55	0	0	0	0	0	0	0
2.4	7.255	5.309	2.185	0	0	0	0	0	0
3.0	9.483	7.807	4.285	1.568	0	0	0	0	0
3.6	10.91	9.577	5.913	2.884	0.9894	0	0	0	0
4.2	11.1	10.15	6.684	3.668	1.678	0.5524	0	0	0
4.8	9.626	9.056	6.213	3.637	1.871	0.8215	0.2631	0	0
5.4	6.069	5.829	4.113	2.508	1.377	0.6799	0.2902	0.091	0
6.0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Таблица 2.10. Приближенные значения функции $g(t,\tau)$ примера 2.6.3

t_k \ t_l	0.6	1.2	1.8	2.4	3.0	3.6	4.2	4.8	5.4
0.6	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1.2	2.086	0	0	0	0	0	0	0	0
1.8	4.647	2.55	0	0	0	0	0	0	0
2.4	7.255	5.309	2.185	0	0	0	0	0	0
3.0	9.483	7.807	4.285	1.568	0	0	0	0	0
3.6	10.91	9.577	5.913	2.884	0.9895	0	0	0	0
4.2	11.1	10.15	6.684	3.668	1.678	0.5542	0	0	0
4.8	9.626	9.056	6.213	3.637	1.871	0.8235	0.2636	0	0
5.4	6.069	5.829	4.113	2.508	1.377	0.6729	0.2891	0.097	0
6.0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Таблица 2.11. Погрешность восстановления функции $g(t,\tau)$ примера 2.6.3

t_k \ t_l	0.6	1.2	1.8	2.4	3.0	3.6	4.2	4.8	5.4
0.6	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1.2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1.8	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2.4	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3.0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3.6	0	0	0	0	0.0001	0	0	0	0
4.2	0	0	0	0	0	0.0018	0	0	0
4.8	0	0	0	0	0	0.0020	0.0005	0	0
5.4	0	0	0	0	0	0.007	0.0011	0.006	0
6.0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

2.6.5. Идентификация линейных динамических систем по нескольким тестовым сигналам

Исследуется возможность определения по нескольким тестовым сигналам динамических характеристик линейных измерительных преобразователей с распределенными параметрами, описываемых уравнениями вида

$$\int_0^t g(t,\tau)x(\tau)d\tau = f(t),\ 0 \le t \le T, \tag{2.6.17}$$

где $g(t,\tau) = 0$ при $\tau > t$.

Требуется, располагая откликом системы на несколько специально подобранных сигналов, определить значения функции $g(t,\tau)$ при $0 \le t,\ \tau \le T$.

Для восстановления импульсной переходной функции $g(t,\tau)$ предлагается следующий метод.

На вход системы, описываемой уравнением (2.6.17), подадим сигналы $x_m(t)$, m=0,1,..., N, в результате на выходе получим выходные сигналы $f_m(t)$, m=0,1,..., N:

$$\int_0^t g(t,\tau)x_m(\tau)d\tau = f_m(t),\ 0 \le t \le T,\ m = 0,1,\ldots,N.$$

Возьмем узлы $t_k = (k+1)T/(N+1), k = 0,1,\ldots,N$. Запомним выходные значения $f_m(t), m = 0,1,\ldots,N$, на сетке $t_k, k = 0,\ldots,N$.

Поставим каждому фиксированному значению t_l, l=0, 1, ..., N, в соответствие систему уравнений

$$\int_0^{t_l} g(t_l,\tau)x_m(\tau)d\tau = f_m(t_l),\quad l = 0,1,\ldots,N, m = 0,\ldots,l. \tag{2.6.18}$$

Аппроксимировав интеграл в левой части формулы (2.6.18) конечной суммой для каждого фиксированного значения l, получим систему линейных уравнений

$$\sum_{k=0}^{l} g(t_l,t_k)x_m(t_k)\Delta t = f_m(t_l), m = 0,\ldots,l, \tag{2.6.19}$$

где $\Delta t = t_{k+1} - t_k, l = 0,\ldots,N$.

В векторной форме система (2.6.19) имеет вид

$$A_l U_l = F_l, \tag{2.6.20}$$

где

$$A_l = \Delta t \begin{pmatrix} x_0(t_0) & x_0(t_1) & \dots & x_0(t_l) \\ . & . & \dots & . \\ x_l(t_0) & x_l(t_1) & \dots & x_l(t_l) \end{pmatrix},$$

$$U_l = \begin{pmatrix} g(t_l, t_0) \\ . \\ . \\ . \\ g(t_l, t_l) \end{pmatrix}, F_l = \begin{pmatrix} f_0(t_l) \\ . \\ . \\ . \\ f_l(t_l) \end{pmatrix}, \; l = 0, \dots, N.$$

В результате получаем $(N+1)$ систему вида (2.6.19), причем каждая система отвечает соответствующему значению l, $l = 0$, 1, $\dots$, N.

При $l = 0$ получим одно уравнение с одной неизвестной, при $l = 1$ – два уравнения с двумя неизвестными и т.д., при $l = N$ получим $(N+1)$ – уравнение с $(N+1)$ неизвестными.

Таким образом, мы покрываем квадрат $[0, T; 0, T]$ равномерной сеткой $(t_l, t_k), k, l = 0, \dots, N$, и определяем значения функции $g(t, \tau)$ в узлах этой сетки $(t_l, t_k), k, l = 0, \dots, N$, полагая, что $g(t_l, t_k) = 0$ при $k > l$, $k, l = 0, \dots, N$.

В общем случае разрешимость систем для произвольных сигналов доказать не удается. Однако это можно сделать для ортогональных на сегменте $[0, T]$ сигналов при достаточно больших l.

В качестве примеров рассмотрим два случая, причем в первом сигналы неортогональны.

Случай 1. В качестве входных сигналов возьмем

$$x_m(t) = t^m, m = 0, \dots, N, \;\; 0 \le t \le T. \tag{2.6.21}$$

Тогда матрицы A_l уравнений (2.6.20) имеют следующий вид:

$$A_l = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ t_0 & t_1 & \dots & t_l \\ . & . & \dots & . \\ t_0^l & t_1^l & \dots & t_l^l \end{pmatrix},$$

$l = 0, \dots, N, t_k = (k+1)T/(N+1), k = 0, 1, \dots, N$.

Определители матриц A_l есть известные определители Вандермонда, которые отличны от нуля, что говорит о разрешимости

систем линейных уравнений (2.6.19) в случае, когда входной сигнал имеет вид (2.6.21). Реализация алгоритма в данном случае проиллюстрирована на модельном примере.

Случай 2. В качестве входных сигналов возьмем

$$x_m(t) = \sin\frac{(m+1)\pi t}{2T}, m = 0, \ldots, N, \quad 0 \le t \le T. \tag{2.6.22}$$

В этом случае матрицы A_l уравнений (2.6.20) имеют следующий вид:

$$A_l = \begin{pmatrix} \sin\varphi_0 & sin\varphi_1 & \ldots & \sin\varphi_l \\ \sin 2\varphi_0 & \sin 2\varphi_1 & \ldots & \sin 2\varphi_l \\ . & . & \ldots & . \\ \sin l\varphi_0 & \sin l\varphi_1 & \ldots & \sin l\varphi_l \end{pmatrix}, \quad l = 0, \ldots, N,$$

где $\varphi_k = \frac{\pi t_k}{2T}, k = 0, \ldots, N, t_k = (k+1)T/(N+1), k = 0, 1, \ldots, N.$

Определители этих матриц равны [137, задача 350]:

$$\det A_l = 2^{l(l+1)} \sin\varphi_0 \sin\varphi_1 \ldots \sin\varphi_l \prod_{0 \le i < k \le l} \sin\frac{\varphi_i + \varphi_k}{2} \sin\frac{\varphi_i - \varphi_k}{2}.$$

Из этого соотношения следует, что $\det A_l \ne 0, l = 0, 1, \ldots, N$; это говорит о разрешимости систем уравнений (2.6.19) в случае, когда входной сигнал имеет вид (2.6.22).

Таким образом, из разобранных выше случаев следует принципиальная осуществимость алгоритма. При использовании других входных сигналов для того, чтобы быть уверенным в разрешимости системы уравнений (2.6.20), необходимо показать, что определитель матриц A_l отличен от нуля. Это легко определить стандартными вычислительными процедурами, имеющимися в MathCad или MatLab [211]. Существование матриц, обратных к A_l, является критерием применимости изложенного выше алгоритма.

Решение систем линейных уравнений (2.6.19) может осуществляться любым стандартным методом линейной алгебры. Однако наиболее целесообразно воспользоваться итерационным методом, который предложен в первой главе.

Оценим погрешность предложенного метода. Она состоит из трех составляющих:

а) погрешности, обусловленной переходом от интегральных уравнений (2.6.18) к дискретной системе уравнений (2.6.19);

б) точности решения системы уравнений (2.6.19);

в) погрешности восстановления функции $g(t,\tau)$ по ее приближенным значением в узлах $(t_k,t_l), k,l=0,\ldots,N-1$.

Оценим каждую из этих составляющих в отдельности. Для этого необходимо предварительно определить класс функций, к которому принадлежит функция $g(t,\tau)$.

Предположим вначале, что функция $g(t,\tau)\in H_{\alpha,\alpha}(M)$, т.е. принадлежит классу функций Гельдера с показателем α по обеим переменным: $|g(t_1,t_2)-g(t_1',t_2')\le M(|t_1-t_1'|^\alpha+|t_2-t_2'|^\alpha)$. Тогда погрешность, обусловленная переходом от интегральных уравнений к дискретным уравнениям, оценивается величиной $M_1N^{-\alpha}$, где $M_1=\text{const}$. Это утверждение следует из общей теории приближенных методов [83]. Точность решения системы уравнений (2.6.20) итерационным методом оценивается величиной M_2q^m, где m – число итераций, $q=\|I-\gamma(\alpha I+A^*A)\|$. В разделе 1.3.1 первой главы показано, что $q=1-\gamma\alpha-\gamma\sigma_*$, где $\sigma_*=\min\sigma(A^*A)$, $\sigma(A^*A)$ – спектр оператора $A^*A, \sigma_*\ge 0$.

Аппроксимация функции $g(t,\tau)\in H_{\alpha,\alpha}(M)$ по значениям в узлах $(t_k,t_l), k,l=0,\ldots,N-1$, оценивается величиной $M_3N^{-\alpha}$.

Таким образом, в первом случае точность восстановления функции $g(t,\tau)$ есть величина $M_4N^{-\alpha}+M_2q^m$, $M_4=\max(M,M_3)$. Выбором m всегда можно добиться, что эта величина будет равна $2M_4N^{-\alpha}$. Можно также показать, что на классе $H_{\alpha,\alpha}(M)$ эта оценка не улучшаема по порядку. Таким образом, предлагаемый метод является оптимальным по порядку.

В случае, если $g(t,\tau)\in W^{r,r}(A)$, то оценка погрешности восстановления функции $g(t,\tau)$ есть величина $O(N^{-r})$.

Приведем модельные примеры.

Пример 2.6.4. Рассмотрим преобразователь (2.6.17), где

$$g(t,\tau)=\begin{cases}\tau(t-\tau)(T-t)(1+t)e^{-\tau}, & \tau\le t,\\ 0, & \tau>t.\end{cases}$$

Требуется определить ИПФ.

Решение. Идентификацию $g(t,\tau)$ будем проводить подачей на вход сигналов

$$x_m(t)=t^m, 0\le t\le T, m=0,\ldots,N.$$

При решении систем (2.6.19), полагаем $N=10$, $T=6$. Результаты, полученные при числе итераций, равном 100, приведены в табл. 2.12 –2.13, причем в табл. 2.12 даны точные значения, в табл. 2.13 – приближенные значения.

Таблица 2.12. Точные значения функции $g(t,\tau)$ примера 2.6.4

t_k \ t_l	0.6	1.2	1.8	2.4	3.0	3.6	4.2	4.8	5.4
0.6	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1.2	2 .086	0	0	0	0	0	0	0	0
1.8	4.647	2.55	0	0	0	0	0	0	0
2.4	7.255	5.309	2.185	0	0	0	0	0	0
3.0	9.483	7.807	4.285	1.568	0	0	0	0	0
3.6	10.91	9.577	5.913	2.884	0.9894	0	0	0	0
4.2	11.1	10.15	6.684	3.668	1.678	0.5524	0	0	0
4.8	9.626	9.056	6.213	3.637	1.871	0.8215	0.2631	0	0
5.4	6.069	5.829	4.113	2.508	1.377	0.6799	0.2902	0.091	0
6.0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Таблица 2.13. Приближенные значения функции $g(t,\tau)$ примера 2.6.4

t_k \ t_l	0.6	1.2	1.8	2.4	3.0	3.6	4.2	4.8	5.4
0.6	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1.2	2.093	0	0	0	0	0	0	0	0
1.8	4.671	2.512	0	0	0	0	0	0	0
2.4	7.215	5.333	2.175	0	0	0	0	0	0
3.0	9.453	7.827	4.278	1.576	0	0	0	0	0
3.6	10.989	9.569	5.901	2.899	0.975	0	0	0	0
4.2	11.122	10.148	6.696	3.671	1.641	0.5321	0	0	0
4.8	9.611	9.049	6.200	3.653	1.883	0.8235	0.2676	0	0
5.4	6.089	5.817	4.133	2.481	1.297	0.6701	0.2871	0.097	0
6.0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Пример 2.6.5. Рассмотрим преобразователь (2.6.17), где

$$g(t,\tau) = \begin{cases} \tau(t-\tau)(T-t)(1+t)e^{-\tau}, & \tau \le t, \\ 0, & \tau > t. \end{cases}$$

Требуется определить ИПФ.

Решение. Идентификацию $g(t,\tau)$ будем проводить подачей на вход сигналов

$$x_m(t) = \sin\frac{(m+1)\pi t}{2T}, \quad m = 0,\dots,N, \quad 0 \le t \le T.$$

При решении систем (2.6.19) полагаем $N = 100$, $T = 6$. Результаты приведены в табл. 2.14 –2.15, причем в табл. 2.14 даны точные значения, в табл. 2.15 – приближенные значения.

Сравнивая результаты восстановления в первом и втором случаях (табл. 2.13, 2.15), можно сделать вывод, что точность восстановления зависит от выбора входных воздействий $x_m(t)$.

Таблица 2.14. Точные значения функции $g(t,\tau)$ примера 2.6.5

t_k \ t_l	0.6	1.2	1.8	2.4	3.0	3.6	4.2	4.8	5.4
0.6	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1.2	2 .086	0	0	0	0	0	0	0	0
1.8	4.647	2.55	0	0	0	0	0	0	0
2.4	7.255	5.309	2.185	0	0	0	0	0	0
3.0	9.483	7.807	4.285	1.568	0	0	0	0	0
3.6	10.91	9.577	5.913	2.884	0.9894	0	0	0	0
4.2	11.1	10.15	6.684	3.668	1.678	0.5524	0	0	0
4.8	9.626	9.056	6.213	3.637	1.871	0.8215	0.2631	0	0
5.4	6.069	5.829	4.113	2.508	1.377	0.6799	0.2902	0.091	0
6.0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Таблица 2.15. Приближенные значения функции $g(t,\tau)$ примера 2.6.5

t_k \ t_l	0.6	1.2	1.8	2.4	3.0	3.6	4.2	4.8	5.4
0.6	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1.2	2.078	0	0	0	0	0	0	0	0
1.8	4.671	2.511	0	0	0	0	0	0	0
2.4	7.195	5.289	2.174	0	0	0	0	0	0
3.0	9.489	7.837	4.262	1.568	0	0	0	0	0
3.6	10.945	9.547	5.942	2.857	0.9894	0	0	0	0
4.2	11.095	10.175	6.692	3.677	1.667	0.5423	0	0	0
4.8	9.526	9.0871	6.227	3.657	1.874	0.8357	0.2643	0	0
5.4	6.169	5.789	4.143	2.528	1.356	0.6721	0.2881	0.094	0
6.0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Данный метод применим для большого класса входных сигналов. Ограничение, накладываемое на функции $x_m(t)$ – условие разрешимости систем линейных уравнений (2.6.20). Применение данного метода выгодно еще и тем, что значения выходных сигналов могут быть известны в фиксированные моменты времени, а матрица системы уравнений (2.6.20) вычисляется только один раз, что увеличивает скорость вычислений.

2.6.6. Определение значений импульсной переходной функции на отрезках прямых $t = t_k$

Рассмотрим системы, описываемые уравнением вида

$$\int_0^t g(t,\tau)x(\tau)d\tau = f(t),\ 0 \le t \le T. \qquad (2.6.23)$$

Требуется, располагая откликом системы на несколько специально подобранных сигналов, определить значения функции $g(t,\tau)$ при $\tau \le t$, полагая $g(t,\tau) = 0$ при $\tau > t$.

Для восстановления импульсной переходной функции $g(t,\tau)$ предложим следующий метод.

Возьмем N узлов: $t_k = \frac{Tk}{N}, k = 0,1,\ldots,N$. Каждому узлу t_k поставим в соответствие функцию $g(t_k,\tau), k = 1,\ldots,N$. Приближенное представление функции $g(t_k,\tau)$ на прямой $t = t_k$, $k = 1,\ldots,N$, будем искать в виде полинома $g_n(t_k,\tau)$ степени n по переменной τ. Полином $g_n(t_k,\tau)$ найдем из решения интегрального уравнения

$$\int_0^{t_k} g_n(t_k,\tau)x(\tau)d\tau = f(t_k), k = 1,2,...,N,$$

при различных входных воздействиях $x(t)$.

Определим функцию $\tilde{g}(t,\tau)$ формулой

$$\tilde{g}(t,\tau) = g_n(t_k,\tau), t \in (t_{k-1},t_k], \tau \in [0,t_k], k = 1,\ldots,N, \text{ где } t_0 = 0.$$

Для определения значений полиномов $g_n(t_k,\tau)$, k=1, 2, ..., N, рассмотрим два случая.

Первый случай. Приближенное решение уравнение (2.6.23) будем искать в виде полинома

$$g_n(t_k,\tau) = \sum_{l=0}^{n} \alpha_l^{(k)} \varphi_l(\tau), \tag{2.6.24}$$

где $\alpha_l^{(k)}$ – неизвестные коэффициенты; $\varphi_l(\tau)$ – линейно независимые полиномы n-го порядка.

Для определения $\alpha_l^{(k)}$ будем подавать на вход устройства $(n+1)$ сигнал $x_m(\tau), m$=0, ..., n, где $x_m(\tau)$ – линейно независимые полиномы.

В результате получим систему линейных уравнений

$$\sum_{l=0}^{n} \alpha_l^{(k)} \int_0^{t_k} \varphi_l(\tau)x_m(\tau)d\tau = f_m(t_k), m = 0,\ldots,n, \tag{2.6.25}$$

из которой найдем коэффициенты $\alpha_l^{(k)}, l$=0, 1, ..., n, k=1, 2, ..., N.

Разрешимость системы (2.6.25) можно доказать при следующем выборе функций: в качестве $\varphi_l(\tau)$ возьмем полиномы $\varphi(\tau) = \tau^l$, l=0, ..., n, а в качестве $x_m(\tau)$ – полиномы $x_m(\tau)$=τ^m, m=0, ..., n.

Тогда система линейных уравнений (2.6.25) примет вид:

$$\sum_{l=0}^{n} \alpha_l^{(k)} \frac{t_k^m}{m} = f_m(t_k), m = 0, \ldots, n.$$

Определитель этой системы равен [137, задача 418]:

$$\Delta = t_k^{(n+1)(n+2)} \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+2} \\ . & . & . & \cdots & . \\ \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \frac{1}{n+3} & \cdots & \frac{1}{2n+1} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{t_k^{(n+1)(n+2)} [1!2!3! \ldots n!]^3}{n!(n+1)!(n+2)! \ldots (2n+1)!} \neq 0, \quad k = 1, \ldots, N,$$

то есть система однозначно разрешима.

Пример 2.6.6. Рассмотрим измерительный преобразователь (2.6.23) с импульсной переходной функцией

$$g(t, \tau) = \tau(t - \tau)(T - t)(1 + t)e^{-\tau}.$$

Требуется определить значения $g(t, \tau)$ при $0 \leq \tau \leq t \leq T$, T=6.

Решение. Введем узлы $t_k = \frac{6k}{10}, k = 0, 1, \ldots, 10$.

Подадим на вход измерительного преобразователя (2.6.23) сигналы $x_m(t) = t^m, m = 0, \ldots, 9$. Через $f_m(t)$ обозначены соответствующие выходные сигналы измерительного преобразоватея (2.6.23).

Далее, действуя по описанному выше методу, найдем приближенные значения импульсной переходной функции $\tilde{g}(t, \tau)$ (результаты восстановления приведены в табл. 2.16, 2.17).

Таблица 2.16. Точные значения функции $g(t, \tau)$ примера 2.6.6

t_k \ t_l	0.6	1.2	1.8	2.4	3.0	3.6	4.2	4.8	5.4
0.6	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1.2	2 .086	0	0	0	0	0	0	0	0
1.8	4.647	2.55	0	0	0	0	0	0	0
2.4	7.255	5.309	2.185	0	0	0	0	0	0
3.0	9.483	7.807	4.285	1.568	0	0	0	0	0
3.6	10.91	9.577	5.913	2.884	0.9894	0	0	0	0
4.2	11.1	10.15	6.684	3.668	1.678	0.5524	0	0	0
4.8	9.626	9.056	6.213	3.637	1.871	0.8215	0.2631	0	0
5.4	6.069	5.829	4.113	2.508	1.377	0.6799	0.2902	0.091	0
6.0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Таблица 2.17. Приближенные значения функции $g(t,\tau)$ примера 2.6.6

t_k \ t_l	0.6	1.2	1.8	2.4	3.0	3.6	4.2	4.8	5.4
0.6	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1.2	2.077	0	0	0	0	0	0	0	0
1.8	4.622	2.610	0	0	0	0	0	0	0
2.4	7.258	5.320	2.194	0	0	0	0	0	0
3.0	9.477	7.817	4.279	1.570	0	0	0	0	0
3.6	10.903	9.569	5.917	2.880	0.985	0	0	0	0
4.2	11.102	10.154	6.689	3.663	1.681	0.5602	0	0	0
4.8	9.619	9.059	6.216	3.632	1.880	0.8225	0.2629	0	0
5.4	6.071	5.831	4.118	2.511	1.381	0.6774	0.2897	0.085	0
6.0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Второй случай. Предложим еще один метод восстановления функции $g(t,\tau)$ на прямых $t = t_k, k = 1,\dots,N$. В качестве входного сигнала рассмотрим функцию $x(\omega,\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-i\omega\tau}$. Тогда на выходе системы получим преобразование Фурье функции $g(t,\tau)$ по переменной τ в заданный момент времени $t = t_k$:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{t_k} g(t_k,\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau = G(t_k,\omega). \qquad (2.6.26)$$

Импульсную переходную функцию $g(t_k,\tau)$ можно найти как обратное преобразование Фурье функции $G(t_k,\omega)$.

Найдем $g(t_k,\tau)$ из решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода (2.6.26). Для краткости вместо $G(t_k,\omega)$ будем писать $G_k(\omega), k = 1,\dots,N$.

Для его решения воспользуемся методом коллокации. Приближенное решение уравнения (2.6.26) будем искать в виде полинома

$$g(t_k,\tau) = g_n^k(\tau) = \sum_{l=1}^{n}\alpha_l^{(k)}e^{-l\tau}, k = 1,\dots,N,$$

коэффициенты $\alpha_l^{(k)}$ которого определяются из системы алгебраических уравнений

$$\sum_{l=1}^{n}\frac{\alpha_l^{(k)}}{l+v} = G(v), v = c_0, c_0+1,\dots,c_0+n-1, \qquad (2.6.27)$$

где верхний индекс k показывает, что коэффициенты разложения функции определяются на прямой $t = t_k$; $c_0 \geq c$, c – целое число.

Определитель системы (2.6.27) равен [137]:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{1+c_0} & \frac{1}{2+c_0} & \cdots & \frac{1}{n+c_0} \\ \frac{1}{2+c_0} & \frac{1}{3+c_0} & \cdots & \frac{1}{n+1+c_0} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{n+c_0} & \frac{1}{n+1+c_0} & \cdots & \frac{1}{2n-1+c_0} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{\prod\limits_{1\le i<l\le n} (i-l)^2}{\prod\limits_{i,l=1}^{n} (c_0+i-1-l)} \neq 0,$$

где произведение в знаменателе берется по всем i и l, принимающим независимо друг от друга все значения от 1 до n.

В случае, когда $c_0 = 0$, определитель Δ равен

$$\Delta = \frac{[1!2!\ldots(n-1)!]^3}{n!(n+1)!\ldots(2n-1)!} \neq 0.$$

Следовательно, система уравнений (2.6.27) имеет единственное решение.

В ряде случаев более предпочтительным оказывается метод, при котором в качестве точек коллокации выбираются точки, расположенные в некотором сегменте $\Delta = [a, b], a \geq c_0$. Это связано с тем, что отпадает необходимость в анализе значений функции $G_k(\omega), k = 1, \ldots, N$, при достаточно больших значениях ω.

Рассмотрим модификацию данного метода.

Найдем приближенное представление функции $g(t, \tau)$ при $t{=}t_k$, $k{=}1, \ldots, N$, в виде разложения ее на отрезке $[0, t_k]$ в ряд только по косинусам или только по синусам.

Тогда функция $g(t_k, \tau)$ разлагается в ряды:

$$g_n(t_k, \tau) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{n} a_m \cos\left(\frac{m\pi\tau}{t_k}\right), \qquad (2.6.28)$$

или

$$g_n(t_k, \tau) = \sum_{m=1}^{n} b_m \sin\left(\frac{m\pi\tau}{t_k}\right). \qquad (2.6.29)$$

Подадим на вход измерительного преобразователя (2.6.23) сигналы:

$$x_0(\tau) = \begin{cases} \frac{2}{t_k}, & \tau \in (0, t_k), \\ 0, & \tau \notin (0, t_k), \end{cases} \qquad (2.6.30)$$
$$x_m(\tau) = \frac{2}{t_k} \cos\left(\frac{m\pi\tau}{t_k}\right), m = 1, \ldots, n,$$

или

$$\overline{x}_m(\tau) = \frac{2}{t_k} \sin\left(\frac{m\pi\tau}{t_k}\right), m = 1, \ldots, n. \qquad (2.6.31)$$

Выходной сигнал преобразователя (2.6.23) разлагается в ряд Фурье с коэффициентами:

$$f_0(t_k) = \frac{2}{t_k} \int_0^{t_k} g(t_k, \tau) d\tau, f_m(t_k) = \frac{2}{t_k} \int_0^{t_k} g(t_k, \tau) \cos\left(\frac{m\pi\tau}{t_k}\right) d\tau,$$
$$m = 1, \ldots, n, \qquad (2.6.32)$$

или

$$\overline{f}_m(t_k) = \frac{2}{t_k} \int_0^{t_k} g(t_k, \tau) \sin\left(\frac{m\pi\tau}{t_k}\right) d\tau, m = 1, \ldots, n. \qquad (2.6.33)$$

Тогда

$$a_0 = f_0, a_m = f_m, m = 1, \ldots, n, \qquad (2.6.34)$$

или

$$b_m = \overline{f}_m, m = 1, \ldots, n, \qquad (2.6.35)$$

и функцию $g(t_k, \tau)$ можно представить на отрезке $\tau \in [0, t_k]$ в виде (2.6.28) или (2.6.29).

Пример 2.6.7. Рассмотрим измерительный преобразователь (2.6.23). Требуется определить значения $g(t, \tau)$ при $0 \le \tau \le t \le T$, $T = 6$. Здесь функция $g(t, \tau) = \tau(t - \tau)(T - t)(1 + t)e^{-\tau}$.

Решение. Введем узлы $t_k = \frac{6k}{10}, k = 1, \ldots, 10$. Приближенное представление функции $g(t_k, \tau)$ ищется в виде полинома (2.6.28) степени 10. Подавая на вход преобразователя сигналы (2.6.30), найдем в силу (2.6.32) и (2.6.34) искомые коэффициенты $a_m, k = 0, \ldots, 10$, разложения (2.6.28).

Результаты восстановления приведены в табл. 2.18, 2.19 (в табл. 2.18 даны точные значения, в табл. 2.19 – приближенные).

Анализируя результаты (табл. 2.16–2.19) модельных примеров 2.6.6, 2.6.7 можно сделать вывод, что точность зависит от выбора входных функций $x_m(t)$ и от числа входных воздействий.

Таблица 2.18. Точные значения функции $g(t,\tau)$ примера 2.6.7

t_k \ t_l	0.6	1.2	1.8	2.4	3.0	3.6	4.2	4.8	5.4
0.6	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1.2	2 .086	0	0	0	0	0	0	0	0
1.8	4.647	2.55	0	0	0	0	0	0	0
2.4	7.255	5.309	2.185	0	0	0	0	0	0
3.0	9.483	7.807	4.285	1.568	0	0	0	0	0
3.6	10.91	9.577	5.913	2.884	0.9894	0	0	0	0
4.2	11.1	10.15	6.684	3.668	1.678	0.5524	0	0	0
4.8	9.626	9.056	6.213	3.637	1.871	0.8215	0.2631	0	0
5.4	6.069	5.829	4.113	2.508	1.377	0.6799	0.2902	0.091	0
6.0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Таблица 2.19. Приближенные значения функции $g(t,\tau)$ примера 2.6.7

t_k \ t_l	0.6	1.2	1.8	2.4	3.0	3.6	4.2	4.8	5.4
0.6	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1.2	2.081	0	0	0	0	0	0	0	0
1.8	4.643	2.553	0	0	0	0	0	0	0
2.4	7.258	5.311	2.179	0	0	0	0	0	0
3.0	9.487	7.809	4.289	1.571	0	0	0	0	0
3.6	10.917	9.579	5.919	2.880	0.991	0	0	0	0
4.2	11.092	10.156	6.678	3.670	1.659	0.5421	0	0	0
4.8	9.628	9.052	6.219	3.634	1.879	0.8256	0.2621	0	0
5.4	6.064	5.831	4.110	2.511	1.364	0.6734	0.2911	0.0897	0
6.0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

В случае восстановлении функции $g(t,\tau)$ на прямых $t = t_k$, $k = 1,\ldots,N$ в виде рядов по ортогональным функциям, в частности тригонометрическим функциям, последний метод является наиболее эффективным и по качеству восстановления, и по объему вычислений, поскольку на выходе системы получаем коэффициенты разложения восстанавливаемой функции.

Глава 3

Идентификация нелинейных динамических систем

3.1. Идентификация нелинейных систем с помощью специально подобранных сигналов

Рассмотрен метод идентификации нелинейных систем, описываемых интегральными уравнениями достаточно общего вида, с помощью специально выбранных тестовых сигналов. Подробно рассмотрен случай представления ядра интегрального уравнения в виде степенного полинома относительно преобразуемого воздействия.

Рассмотрим нелинейный динамический объект, функционирование которого описывается интегральным уравнением

$$\int_0^t g(t-\tau, x(\tau))d\tau = f(t), \tag{3.1.1}$$

где функция $g(t,x)$ имеет n производных по переменной x.

В случае, когда ядро $g(t,x)$ уравнения (3.1.1) имеет вид

$$g_n(t,x) = \sum_{k=1}^{n} g_k(t)x^k(t), \tag{3.1.2}$$

вопросам идентификации коэффициентов $\{g_k(t)\}$ посвящен ряд работ, в которых, в основном используется метод рядов Вольтерра и Винера (см. [78, 120, 138, 183, 222]). Изложение методов идентификации нелинейных систем и достаточно подробная библиография содержатся в монографиях [48, 71] и работах [16, 17, 20].

Распространим описанные в предыдущей главе методы идентификации линейных объектов по нескольким тестовым сигналам

(частично эти результаты представлены в работах [13, 15, 39]) на нелинейные динамические объекты.

1. Начнем исследование с рассмотрения уравнения

$$\int_0^t g_1(t-\tau)x(\tau)d\tau + \int_0^t g_2(t-\tau)(x(\tau))^2 d\tau = f(t). \qquad (3.1.3)$$

Подадим на вход объекта, описываемого уравнением (3.1.3), четыре входных сигнала:

$$x_k(t) = \begin{cases} 0, & -\infty < t < 0; \\ \frac{1}{2^{k-1}} e^{-2t}, & 0 \le t < \infty, \end{cases}$$

$k = 1, 2, 3, 4$.

Отметим, что выбор этих сигналов определен изложенным в предыдущей главе методом идентификации линейных объектов, когда в качестве входных сигналов использовались функции $y_1(t)$ и $y_2(t)$, связанные между собой соотношением

$$y_2(t) = \int_t^\infty y_1(\tau)d\tau.$$

В самом деле, найдем две функции $z_1(t)$ и $z_2(t)$ такие, что

$$z_2(t) = \int_t^\infty z_1(\tau)d\tau, \qquad (3.1.4)$$

$$(z_2(t))^2 = \int_t^\infty (z_1(\tau))^2 d\tau. \qquad (3.1.5)$$

Из соотношений (3.1.4), (3.1.5) следует, что

$$\left(\int_t^\infty z_1(\tau)d\tau\right)^2 = \int_t^\infty (z_1(\tau))^2 d\tau. \qquad (3.1.6)$$

Дифференцируя два раза уравнение (3.1.6) по переменной t, последовательно получаем при первом дифференцировании

$$-2\left(\int_t^\infty z_1(\tau)d\tau\right) z_1(t) = -(z_1(t))^2,$$

и после сокращения на $z_1(t)$ ($z_1(t) \neq 0$) и дифференцирования окончательно имеем

$$-2z_1(t) = z_1'(t). \tag{3.1.7}$$

В качестве $z_1(t)$ берем входные сигналы, не обращающиеся в ноль в рассматриваемом интервале.

Решая дифференциальное уравнение (3.1.7), имеем

$$z_1(t) = ce^{-2t}.$$

Подавая на вход объекта последовательно четыре сигнала $x_k(t)$, $k = 1, 2, 3, 4$, на выходе имеем

$$f_1(t) = \int_0^t g_1(t-\tau)e^{-2\tau}d\tau + \int_0^t g_2(t-\tau)e^{-4\tau}d\tau,$$

$$f_2(t) = \frac{1}{2}\int_0^t g_1(t-\tau)e^{-2\tau}d\tau + \frac{1}{4}\int_0^t g_2(t-\tau)e^{-4\tau}d\tau,$$

$$f_3(t) = \frac{1}{4}\int_0^t g_1(t-\tau)e^{-2\tau}d\tau + \frac{1}{16}\int_0^t g_2(t-\tau)e^{-4\tau}d\tau,$$

$$f_4(t) = \frac{1}{8}\int_0^t g_1(t-\tau)e^{-2\tau}d\tau + \frac{1}{64}\int_0^t g_2(t-\tau)e^{-4\tau}d\tau. \tag{3.1.8}$$

Представим систему (3.1.8) в виде

$$f_1(t) = \int_0^t g_1(t-\tau)e^{-2\tau}d\tau + \int_0^t g_2(t-\tau)e^{-4\tau}d\tau,$$

$$f_2(t) = \int_0^t g_1(t-\tau)\left(\int_0^\infty e^{-2v}dv - \int_0^\tau e^{-2v}dv\right)d\tau +$$

$$+ \int_0^t g_2(t-\tau)\left(\int_0^\infty e^{-4v}dv - \int_0^\tau e^{-4v}dv\right)d\tau,$$

$$f_3(t) = \frac{1}{4}\int_0^t g_1(t-\tau)e^{-2\tau}d\tau + \frac{1}{16}\int_0^t g_2(t-\tau)e^{-4\tau}d\tau,$$

$$f_4(t) = \int_0^t g_1(t-\tau)\left(\int_0^\infty \frac{1}{4}e^{-2v}dv - \int_0^\tau \frac{1}{4}e^{-2v}dv\right)d\tau +$$

$$+\int_0^t g_2(t-\tau)\left(\int_0^\infty \frac{1}{16}e^{-4v}dv-\int_0^\tau \frac{1}{16}e^{-4v}dv\right)d\tau. \qquad (3.1.9)$$

Применим к системе уравнений (3.1.9) преобразование Лапласа:

$$\begin{cases} F_1(p)=G_1(p)A_1(p)+G_2(p)A_2(p); \\ F_2(p)=\dfrac{G_1(p)K_1}{p}-\dfrac{G_1(p)A_1(p)}{p}+\dfrac{G_2(p)K_2}{p}-\dfrac{G_2(p)A_2(p)}{p}; \\ F_3(p)=G_1(p)A_3(p)+G_2(p)A_4(p); \\ F_4(p)=\dfrac{G_1(p)K_3}{p}-\dfrac{G_1(p)A_3(p)}{p}+\dfrac{G_2(p)K_4}{p}+\dfrac{G_2(p)A_4(p)}{p}, \end{cases} \qquad (3.1.10)$$

где $A_1(p)$, $A_2(p)$, $A_3(p)$, $A_4(p)$ – преобразование Лапласа функций

$$e^{-2t},\ e^{-4t},\ \frac{1}{4}e^{-2t},\frac{1}{16}e^{-4t}$$

и

$$K_1=\frac{1}{2},\ K_2=\frac{1}{4},\ K_3=\frac{1}{8},\ K_4=\frac{1}{64}.$$

Умножая второе и четвертое уравнения системы (3.1.10) на p и складывая их с первым и третьим уравнениями, получаем

$$\begin{aligned} F_1(p)+pF_2(p)&=\frac{1}{2}G_1(p)+\frac{1}{4}G_2(p), \\ F_3(p)+pF_4(p)&=\frac{1}{8}G_1(p)+\frac{1}{64}G_2(p). \end{aligned} \qquad (3.1.11)$$

Так как определитель системы (3.1.11) отличен от нуля, то эта система однозначно разрешима и

$$\begin{aligned} G_1(p)&=\frac{32}{3}F_3(p)+\frac{32}{3}pF_4(p)-\frac{2}{3}F_1(p)-\frac{2}{3}pF_2(p), \\ G_2(p)&=\frac{16}{3}F_1(p)+\frac{16}{3}pF_2(p)-\frac{64}{3}F_3(p)-\frac{64}{3}pF_4(p). \end{aligned} \qquad (3.1.12)$$

Применяя к (3.1.12) обратное преобразование Лапласа, имеем

$$\begin{aligned} g_1(t)&=\frac{32}{3}f_3(t)+\frac{32}{3}f_4'(t)-\frac{2}{3}f_1(t)-\frac{2}{3}f_2'(t), \\ g_2(t)&=\frac{16}{3}f_1(t)+\frac{16}{3}f_2'(t)-\frac{64}{3}f_3(t)-\frac{64}{3}f_4'(t). \end{aligned} \qquad (3.1.13)$$

Рассмотрим простой модельный пример, иллюстрирующий изложенный метод.

Пример 3.1.1. Пусть исследуемое устройство описывается уравнением (3.1.3), где

$$g_1(t) = \begin{cases} e^{-t}, \ t \geq 0, \\ 0, \ t < 0. \end{cases}$$

$$g_2(t) = \begin{cases} e^{-5t}, \ t \geq 0, \\ 0, \ t < 0, \end{cases}$$

При подаче на вход функций $x_k(t)$, $k = 1, 2, 3, 4$, выходные сигналы (при $t \geq 0$) равны

$$f_1(t) = e^{-t} - e^{-2t} - e^{-4t} - e^{-5t};$$

$$f_2(t) = \frac{e^{-t}}{2} - \frac{e^{-2t}}{2} - \frac{e^{-4t}}{2} - \frac{e^{-5t}}{2};$$

$$f_3(t) = \frac{e^{-t}}{4} - \frac{e^{-2t}}{4} - \frac{e^{-4t}}{16} - \frac{e^{-5t}}{16};$$

$$f_4(t) = \frac{e^{-t}}{8} - \frac{e^{-2t}}{8} - \frac{e^{-4t}}{64} - \frac{e^{-5t}}{64}.$$

Требуется определить $g_1(t)$ и $g_2(t)$, располагая значениями $x_1(t)$, ..., $x_4(t)$ и $f_1(t)$, ..., $f_4(t)$.

Решение. По формулам (3.1.13), имеем $g_1(t)=e^{-t}$, $g_2(t)=e^{-5t}$, что и требовалось получить.

2. Рассмотрим уравнение (3.1.1) в предположении, что ядро $g(t, x)$ имеет вид (3.1.2). Подадим на вход объекта $2n$ сигналов:

$$x_k(t) = \begin{cases} 0, \ t < 0, \\ \dfrac{1}{2^{k-1}} e^{-2t}, \ t \geq 0, \end{cases} \quad k = 1, 2, \ldots, 2n.$$

Тогда выходные сигналы равны

$$f_l(t) = \sum_{k=1}^{n} \int_0^t g_k(t-\tau) x_l^k(\tau) d\tau, \ l = 1, 2, \ldots, 2n. \tag{3.1.14}$$

Представим сигнал $x_{2k}(t)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ в виде

$$x_{2k}(t) = \frac{1}{2^{2k-1}} e^{-2t} = \int_t^\infty x_{2k-1}(\tau) d\tau =$$

$$= \int_0^\infty x_{2k-1}(\tau)d\tau - \int_0^t x_{2k-1}(\tau)d\tau. \qquad (3.1.15)$$

Подставим выражение (3.1.15) в $2k(k = 1, 2, \ldots, n)$ уравнений системы (3.1.14). В результате получаем систему

$$\sum_{k=1}^{n} \int_0^t g_k(t-\tau)x_{2l-1}^k(\tau)d\tau = f_{2l-1}(t),$$

$$\sum_{k=1}^{n} \int_0^t g_k(t-\tau)\left(\int_0^\infty x_{2l-1}(v)dv - \int_0^\tau x_{2l-1}(v)dv\right)^k d\tau = f_{2l}(t), \quad (3.1.16)$$

$$l = 1, 2, \ldots, n.$$

Применяя к системе уравнений (3.1.16) преобразование Лапласа, умножая четные уравнения на p, решаем полученную систему уравнений относительно $G_i(p)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Единственность решения следует из того, что благодаря соответствующему подбору коэффициентов $1/2^{k-1}$ функций $x_k(t)$ определитель получаемой системы отличен от нуля. Применяя затем обратное преобразование Лапласа, получаем аналитическое выражение для вычисления функций $g_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Соответствующие выражения не выписываются в явном виде из-за их громоздкости.

3. Рассмотрим уравнение (3.1.1). Пусть ядро $g(t, x)$ имеет производные до $(n + 1)$ порядка по переменной x. Разложим $g(t, x)$ по формуле Тейлора:

$$g(t, x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{g_k(t, 0)x^k(t)}{k!} + r_{n+1}(t, x),$$

где $g_k(t, 0) = \dfrac{\partial^k g(t, x)}{\partial x^k}|_{x=0}$.

Будем считать, что

$$\max_{0\le t<\infty,\, 0\le\Theta\le 1} |g_{n+1}(t, \Theta)| \le 1, \ \max_{0\le t<\infty} |x(t)| \le 1,$$

тогда

$$\max_{0\le t<\infty} |r_{n+1}(t, x(t))| \le 1/(n + 1)!.$$

Из этого неравенства следует, что при одном и том же входном сигнале $x(t)$ при переходе от (3.1.1) к уравнению

$$\int_0^t g_n(t-\tau)x(\tau)d\tau = f_n(t)$$

погрешность в определении правой части при $0 \le t \le 1$ равна

$$\max_t |f(t) - f_n(t)| \le 1/(n+1)!.$$

Так как система линейных уравнений, из которой по второму алгоритму определяются функции $G_i(p)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, однозначно разрешима, то значения $G_i(p)$ определяются с точностью $A_i/(n+1)!$, где константы A_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ определяются коэффициентами этой системы. Переход от $G_i(p)$ к $g_i(t)$ дает погрешность $B_i/(n+1)!$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Таким образом, при достаточно больших n погрешность восстановления ядра по формуле

$$g(t, x) = \sum_{k=0}^{n} \tilde{g}_k(t, 0)\frac{(x(t))^k}{k!},$$

где $\tilde{g}_k(t, 0)$ – функции, определенные по методу, изложенному в пункте 2, равна $C_i/(n+1)!$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

4. Моделирование входных функций вида

$$x_k(t) = \begin{cases} 0, & -\infty < t < 0, \\ \dfrac{1}{2^{k-1}}e^{-2t}, & 0 \le t < \infty, \end{cases}$$

достаточно просто при исследовании электрических цепей, но чрезвычайно сложно при исследовании механических объектов. В этом случае при идентификации нелинейных механических систем, описываемых уравнениями вида (3.1.1), естественно взять в качестве входных сигналов функции

$$x_k(t) = \begin{cases} 0, & -\infty < t < 0, \\ \dfrac{1}{2^{k-1}}\varphi(t), & 0 \le t < \infty, \end{cases}$$

$k = 1, 2, \ldots, n$, где $\varphi(t)$ – произвольная, достаточно просто реализуемая функция. Подавая на вход идентифицируемого объекта сигналы $x_k(t)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, получаем систему уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{(l-1)k}} \int_0^t g_k(t-\tau)(\varphi(\tau))^k d\tau = f_l(t), \quad l = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.1.17}$$

Определитель этой системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2^2} & \cdots & \frac{1}{2^n} \\ & & \cdots & \\ \frac{1}{2^{n-1}} & \frac{1}{2^{(n-1)2}} & \cdots & \frac{1}{2^{(n-1)n}} \end{vmatrix}$$

равен [137, пример 343]:

$$\Delta = (-1)^{n-1}\Pi_{i=1}^{n}\frac{1}{2^i}\Pi_{n>i>k\geq 1}\left(\frac{1}{2^i}-\frac{1}{2^k}\right)\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2^i f^i(2^i)}\right],$$

где $f(x) = (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$, $x_k = \left(\frac{1}{2}\right)^k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, и, следовательно, $\Delta \neq 0$.

Из теоремы Крамера следует, что система (3.1.17) однозначно разрешима. Разрешая ее относительно интегралов, получаем n интегральных уравнений:

$$\int_0^t g_k(t-\tau)(\varphi(\tau))^k d\tau = \psi_k(t),\ k = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.1.18}$$

Для решения каждого из уравнений (3.1.18) можно воспользоваться двумя методами.

Во-первых, применяя к каждому уравнению системы (3.1.18) преобразование Лапласа, имеем

$$G_k(p)L(\varphi^k(t)) = \psi_k(p),\ k = 1, 2, \ldots, n, \tag{3.1.19}$$

где $L(\varphi)$ – преобразование Лапласа функции φ.

Разрешая каждое из уравнений, входящих в (3.1.19), относительно $G_k(p)$ и применяя к $G_k(p)$ обратное преобразование Лапласа, вычисляем $g_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Во-вторых, для решения каждого из уравнений, входящих в (3.1.18), можно воспользоваться (при выполнении условия A, заключающегося в том, что значения функций $\Phi_k(\omega)$, являющихся преобразованием Фурье функций $\varphi^k(t)$, расположены внутри единичной окружности с центром в точке $(1, 0)$), итерационным процессом

$$g_k^{m+1}(t) = \alpha_m g_k^m(t) -$$
$$-(1-\alpha_m)\left(g_k^m(t) - \int_0^t g_k^m(t-\tau)\varphi^k(\tau)d\tau - \psi_k(t)\right), \tag{3.1.20}$$
$$k = 1, 2, \ldots, n, m = 0, 1, \ldots, \text{где } 0 < a < \alpha_m < b < 1.$$

Сходимость итерационного процесса (3.1.20) в метрике пространства $L_2(-\infty, \infty)$ доказана в [13]. Там же указаны способы построения итерационных процессов в случаях, когда условие A нарушается.

3.2. Идентификации нелинейных систем с помощью гармонических сигналов

Рассматривается метод идентификации нелинейных измерительных преобразователей, описываемых нелинейными уравнениями в свертках. В частности, такими уравнениями описываются преобразователи, состоящие из параллельно соединенных блоков, содержащих последовательно соединенные безынерционный нелинейный преобразователь и линейное инерционное звено. Идентификация проводится подачей на вход последовательности синусоидальных сигналов. Метод может быть использован при стендовых испытаниях и при эксплуатации объекта. В последнем случае предполагается, что входной сигнал достаточно медленно изменяется.

Рассмотрим динамический объект, функционирование которого описывается интегральным уравнением

$$\int_0^t g(t-\tau, x(\tau))d\tau = f(t), \tag{3.2.1}$$

где ИПФ $g(t,x)$ имеет n производных по переменной x.

В случае, когда ядро $g(t,x)$ уравнения (3.2.1) имеет вид

$$g(t,x) = \sum_{k=1}^{n} g_k(t)x^k(t), \tag{3.2.2}$$

вопросам идентификации коэффициентов g_k посвящен ряд работ, в которых в основном используется метод рядов Вольтерра. Изложение методов идентификации линейных и нелинейных систем и достоточно полная библиография содержатся в монографиях [1, 120, 138, 154].

Идентификация нелинейных уравнений (3.2.1) при ядрах вида (3.2.2) с помощью $2n$ специальных сигналов описана в работе [12].

Представляет значительный интерес построение методов идентификации с помощью просто реализуемых на практике сигналов (например, синусоид) или по одному входному сигналу со спектром,

содержащим гармоники $a_k \sin(kt + \theta_k)$, у которых $a_k \neq 0$, $k = 0, 1 \ldots N$, где N – достаточно большое целое число.

3.2.1. Линейные системы

Рассмотрим линейную систему, функционирование которой описывается уравнением

$$\int_0^t g(t-\tau)x(\tau)d\tau = f(t), \tag{3.2.3}$$

где $g(t)$ – функция удовлетворяющая условиям каузальности, т.е. $g(t) = 0$ при $t \leq 0$.

Вначале будем считать, что импульсная переходная функция $g(t)$ отлична от нуля на сегменте $[0, a] \subset [0, 2\pi]$ и равна нулю во всех остальных точках числовой оси. Пользуясь свойством свертки, преобразуем уравнение (3.2.3) к виду

$$\int_0^t x(t-\tau)g(\tau)d\tau = f(t). \tag{3.2.4}$$

Для определения импульсной переходной функции $g(t)$ подадим на вход последовательность синусоидальных сигналов. Как правило [68, 71, 168], для определения импульсной переходной функции измерительного преобразователя, описываемого уравнением в свертках, на вход подают δ-образные сигналы. Однако использование этих сигналов вызывает большую погрешность. В работе [13] показано, что при подаче на вход ступенчатого сигнала, возмущенного аддитивной помехой, являющейся синусоидой с амплитудой ε (ε – как угодно малое число) и частотой ω, погрешность восстановления импульсной переходной функции равна $A\omega\varepsilon$, где $A - \text{const}$. Эта погрешность стремится к бесконечности при $\omega \to \infty$ и при любом ε.

Аналогичная ситуация возникает и при использовании δ-образных сигналов.

Подставляя вместо $x(t)$ функцию $x_k(t)$, где $x_k(t) = \sin kt$, если $t \geq 0$; $x_k(t) = 0$, если $t < 0$, $k = 1, 2, \ldots, N$, имеем

$$\sin kt \int_0^t g(\tau)\cos k\tau d\tau - \cos kt \int_0^t g(\tau)\sin k\tau d\tau = f_k(t), \quad k = 1, 2, \ldots, N. \tag{3.2.5}$$

При $t \geq 2\pi$ уравнение (3.2.5) принимает вид

$$\sin kt \int_0^{2\pi} g(\tau)\cos k\tau d\tau - \cos kt \int_0^{2\pi} g(\tau)\sin k\tau d\tau = f_k(t), \quad k = 1, 2, \ldots, N. \tag{3.2.6}$$

Рассмотрим систему (3.2.6) при $2\pi \leq t \leq 4\pi$. Продолжим функцию $f_k(t)$ с сегмента $[2\pi, 4\pi]$ периодически с периодом 2π на всю числовую ось. Полученную в результате функцию обозначим через $f_k^*(t), k = 1, \ldots, N$. Разложим функцию $f_k^*(t)$ в ряд Фурье:

$$f_k^*(t) = \frac{1}{2}a_0^k + \sum_{l=1}^{\infty}(a_l^k \cos lt + b_l^k \sin lt).$$

Из разложения (3.2.6) видно, что

$$a_k^k = -\int_0^{2\pi} g(\tau)\sin k\tau d\tau, b_k^k = \int_0^{2\pi} g(\tau)\cos k\tau d\tau. \tag{3.2.7}$$

Формулы (3.2.7) определяют коэффициенты Фурье функции $g(t)$. Пусть разложение функции $g(t)$ в ряд Фурье имеет вид

$$g(t) = \frac{1}{2}g_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(g_k \cos kt + g_k' \sin kt). \tag{3.2.8}$$

Из формул (3.2.7), (3.2.8) следует, что

$$g_k = \frac{1}{\pi}b_k^k,\ g_k' = -\frac{1}{\pi}a_k^k,\ k = 1, 2, \ldots$$

Осталось определить g_0. Подадим на вход объекта сигнал $x_0(t) = 1$ при $0 \leq t \leq 6\pi$, $x_0(t) = 0$ при остальных значениях t.

Соответствующий выходной сигнал обозначим через $f_0(t)$.

В результате при $t = 2\pi$ имеем $\int_0^{2\pi} g(\tau)d\tau = f(2\pi)$. Отсюда следует, что $g_0 = \frac{1}{\pi}f(2\pi)$. После того как вычислены коэффициенты Фурье g_k и g_k' $(k = 0, 1, \ldots, N)$ функции $g(t)$, саму функцию $g(t)$ можно вычислить по формуле

$$g(t) \approx \frac{g_0}{2} + \sum_{k=1}^{N}(g_k \cos kt + g_k' \sin kt).$$

Замечания 3.2.1. *1. Для уменьшения влияния переходных процессов можно при определении функции $f_k^*(t)$ взять за исходную функцию $f_k(t)$ при $2r\pi \le t \le 2(r+1)\pi$, где r – достаточно большое целое число.*

2. Выше для вычисления g_0 также была использована ступенчатая функция. Однако погрешность от ее использования в излагаемом методе значительно меньше, чем в известных.

Рассмотрим теперь случай, когда функция $g(t)$ отлична от нуля на сегменте $[0, a]$, где $a > 2\pi$. Пусть l – наименьшее целое число такое, что $[0, a] \subset [0, 2l\pi]$. Продолжим функцию $g(t)$ нулем на интервал $(a, 2l\pi]$ и затем с сегмента $[0, 2l\pi]$ продолжим с периодом $2l\pi$ на всю числовую ось. Продолженную таким образом функцию обозначим через $g(t)$.

Найдем коэффициенты Фурье функции $g(t)$.

Подадим на вход системы, описываемой уравнением (3.2.3), последовательность сигналов $x_k(t) = \sin\frac{kt}{l}$ при $0 \le t$; $x_k(t) = 0$ при $t < 0$, $k = 1, 2, \ldots$

Повторяя описанные выше выкладки, приходим при $t \ge 2l\pi$ к системе уравнений

$$\sin\frac{kt}{l}\int_0^{2l\pi} g(\tau)\cos\frac{k\tau}{l}d\tau - \cos\frac{kt}{l}\int_0^{2l\pi} g(\tau)\sin\frac{k\tau}{l}d\tau = f_k(t),$$
$$k = 1, 2, \ldots, N.$$

Продолжая функцию $f_k(t)$ с сегмента $[2l\pi, 4l\pi]$ на числовую ось и повторяя приведенные в предыдущем в пункте выкладки, находим коэффициенты Фурье g_k и $g_k'(k = 1, 2, \ldots,)$ функции $g(t)$. Коэффициент g_0 находится при подаче на вход сигнала $x_0(t) = 1$ при $0 \le t \le 2lr\pi$, $x_0(t) = 0$ при остальных значениях t, где r – достаточно большое число.

Рассмотрим алгоритм приближенного вычисления функции $g(t)$ по одному входному сигналу.

Для определенности остановимся на случае, когда функция $g(t)$ отлична от нуля на сегменте $[0, 2\pi]$. Распространение на случай, когда функция отлична от нуля на сегменте $[0, a]$, где $a > 2\pi$, проводится так же, как отмечено в замечании.

Пусть входной сигнал системы $x(t)$ определяется выражением $x(t) = \varphi(t)$ при $0 \le t \le 2m\pi$, $x(t) = 0$ при остальных значениях t, где $\varphi(t)$ – периодическая с периодом 2π функция, которая

разлагается в ряд Фурье: $\varphi(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kt + b_k \sin kt)$, в котором для достаточно большого N отличны от нуля коэффициенты $a_k, k = 0, 1, 2, \ldots, N$, или коэффициенты a_0, b_k, $k = 1, 2, \ldots, N$; m – достаточно большое натуральное число. Предположим для определенности, что взята функция $\varphi(t)$, разложение в ряд Фурье которой имеет вид $\varphi(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} b_k \sin kt$.

Подставляя эту функцию в уравнение (3.2.3) и проделывая выкладки, описанные выше, приходим при $2\pi \le t \le 2m\pi$ к выражению

$$\frac{a_0}{2}\int_0^{2\pi} g(\tau)d\tau + \sum_{k=1}^{N}\left(b_k \sin kt \int_0^{2\pi} g(\tau)\cos k\tau d\tau - \right.$$
$$\left. - \cos kt \int_0^{2\pi} g(\tau)\sin k\tau d\tau\right) = f(t). \qquad (3.2.9)$$

Продолжим функцию $f(t)$ с сегмента $[2\pi, 4\pi]$ периодически, с периодом 2π, на числовую ось. Полученную в результате функцию обозначим через $f^*(t)$. Разложим функцию $f^*(t)$ в ряд Фурье:

$$f^*(t) = \frac{f_0}{2} + \sum_{k=1}^{N}(f_k \cos kt + f'_k \sin kt). \qquad (3.2.10)$$

Из разложений (3.2.9) и (3.2.10) имеем

$$\int_0^{2\pi} g(\tau)d\tau = \frac{f_0}{a_0}, ..., \qquad (3.2.11)$$

$$\int_0^{2\pi} g(\tau)\cos k\tau d\tau = \frac{f'_k}{b_k}, \int_0^{2\pi} g(\tau)\sin k\tau d\tau = \frac{f_k}{b_k},\ k = 1, 2, \ldots, N. \qquad (3.2.12)$$

Из выражений (3.2.11), (3.2.12) следует, что коэффициенты Фурье функции $g(t)$ равны

$$g_0 = \frac{f_0}{\pi a_0}, g_k = \frac{f'_k}{\pi b_k}, g'_k = -\frac{f_k}{\pi b_k}, k = 1, 2, \ldots, N.$$

Отсюда получаем разложение для импульсной переходной функции:

$$g(t) = \frac{g_0}{2} + \sum_{k=1}^{N}(g_k \cos kt + g'_k \sin kt).$$

3.2.2. Идентификация нелинейных систем

3.2.2.1. Нелинейность второго порядка

Исследование идентификации нелинейных преобразователей начнем с рассмотрения преобразователя, описываемого уравнением

$$\int_0^t g_1(t-\tau)x(\tau)d\tau + \int_0^t g_2(t-\tau)x^2(\tau)d\tau = f(t). \qquad (3.2.13)$$

Предположим, что функции $g_1(t)$ и $g_2(t)$ отличны от нуля на некотором сегменте $[a,b]$ таком, что $[a,b] \subset [0,2\pi]$, и равны нулю всюду вне этого сегмента. Если сегмент $[a,b] \subset [0,2\pi]$, то продолжим функции $g_1(t)$ и $g_2(t)$ нулем на сегменте $[0,2\pi]$. Подадим на вход системы последовательность функций

$$x_k(t) = \begin{cases} \sin kt \text{ при } t \geq 0, \\ 0 \quad \text{при остальных значениях } t, \\ \qquad k = 1,2,\ldots,N. \end{cases}$$

Воспользовавшись формулой свертки, представим (3.2.13) в виде

$$\sin kt \int_0^t g_1(\tau)\cos k\tau d\tau - \cos kt \int_0^t g_1(\tau)\sin k\tau d\tau +$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^t g_2(\tau)d\tau - \frac{\cos 2kt}{2}\int_0^t g_2(\tau)\cos 2k\tau d\tau -$$
$$-\frac{\sin 2kt}{2}\int_0^t g_2(\tau)\sin 2k\tau d\tau = f_k(t), \quad k = 1,2,\ldots,N. \qquad (3.2.14)$$

При $t \geq 2\pi$ выражение (3.2.14) принимает вид

$$\sin kt \int_0^{2\pi} g_1(\tau)\cos k\tau d\tau - \cos kt \int_0^{2\pi} g_1(\tau)\sin k\tau d\tau +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} g_2(\tau)d\tau - \cos 2kt \int_0^{2\pi} g_2(\tau)\cos 2k\tau d\tau -$$

$$-\sin 2kt \int_0^{2\pi} g_2(\tau)\sin 2k\tau d\tau = f_k(t),\ \ k = 1, 2, \ldots, N. \qquad (3.2.15)$$

Распространим функцию $f_k(t), k = 1, 2 \ldots, N$, с сегмента $[2\pi, 4\pi]$ периодически с периодом 2π на числовую ось. Полученную в результате функцию обозначим через $f_k^*(t)$.

Ее разложение в ряд Фурье имеет вид

$$f_k^*(t) = \frac{f_0^k}{2} + \sum_{l=1}^{2n}(f_l^k \cos lt + \overline{f}_l^k \sin lt),\ k = 1, 2 \ldots, N. \qquad (3.2.16)$$

Из (3.2.15), (3.2.16) имеем

$$g_k^1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g_1(t)\cos ktdt = \frac{1}{\pi}\overline{f}_k^k,$$

$$\overline{g}_k^1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g_1(t)\sin ktdt = -\frac{1}{\pi}\ f_k^k,$$

$$g_0^2 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g_2(t)dt = \frac{1}{\pi}f_0^k;\ \ k = 1, 2, \ldots, N, \qquad (3.2.17)$$

$$g_{2k}^2 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g_2(t)\cos 2ktdt = -\frac{1}{\pi}f_{2k}^k,$$

$$\overline{g}_{2k}^2 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g_2(t)\sin 2ktdt = -\frac{1}{\pi}\overline{f}_{2k}^k,\ \ k = 1, 2, \ldots, N. \qquad (3.2.18)$$

Для нахождения коэффициентов $g_k^2, \overline{g}_k^2, k{=}1, 3, \ldots, 2v{+}1,\ v{=}[N/2]$, надо на вход системы подать сигналы

$$x_k(t) = \begin{cases} \sin\frac{kt}{2} \text{ при } t \geq 0, \\ 0 \text{ при } t \leq 0, \end{cases}\ \ k = 1, 3, \ldots, 2v+1, v = [N/2].$$

Напомним, что $[a]$ – целая часть числа a.

Повторяя проведенные выше выкладки, получаем для g_k^2, $\overline{g}_k^2$, $k = 1, 3, \ldots, 2v+1$, формулы, аналогичные формулам (3.2.17), (3.2.18).

Для нахождения коэффициента g_0^1 на вход системы подаем ступенчатый сигнал

$$x_k(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \geq 0, \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases}$$

Соответствующий выходной сигнал обозначим через $f_0(t)$.

В результате при $t \geq 2\pi$ имеем

$$g_0^1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g_1(t)dt = \frac{1}{\pi} f_0(t) - g_0^2.$$

В результате описанных действий оказались вычисленными коэффициенты Фурье функций $g_1(t)$ и $g_2(t)$, что позволяет восстановить эти функции в виде отрезков рядов Фурье.

3.2.2.2. Нелинейность третьего порядка

Так как рассмотрение в общем виде нелинейных преобразователей с нелинейностями n порядка затруднительно, то ниже ограничиваемся преобразователями с нелинейностями третьего порядка. Из проведенных выкладок легко проследить за общим алгоритмом.

Рассмотрим нелинейный преобразователь

$$\int_0^t g_1(t-\tau)x(\tau)d\tau + \int_0^t g_2(t-\tau)x^2(\tau)d\tau + \\ + \int_0^t g_3(t-\tau)x^3(\tau)d\tau = f(t). \qquad (3.2.19)$$

Подадим на вход системы (3.2.19) последовательность сигналов:

$$x_k^0(t) = \begin{cases} \sin kt \text{ при } t \geq 0, \\ 0 \text{ при } t < 0, \end{cases}$$

$$x_k^1(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\sin kt \text{ при } t \geq 0, \\ 0 \text{ при } t < 0. \end{cases}$$

В результате при $t > 2\pi$ получаем систему

$$\sin kt \int_0^{2\pi} g_1(\tau)\cos k\tau d\tau - \cos kt \int_0^{2\pi} g_1(\tau)\sin k\tau d\tau +$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} g_2(\tau)d\tau - \frac{\cos 2kt}{2}\int_0^{2\pi} g_2(\tau)\cos 2k\tau d\tau -$$
$$-\frac{\sin 2kt}{2}\int_0^{2\pi} g_2(\tau)\sin 2k\tau d\tau + \frac{3}{4}\sin kt \int_0^{2\pi} g_3(\tau)\cos k\tau d\tau -$$
$$-\frac{3}{4}\cos kt \int_0^{2\pi} g_3(\tau)\sin k\tau d\tau - \frac{1}{4}\sin 3kt \int_0^{2\pi} g_3(\tau)\cos 3k\tau d\tau +$$
$$+\frac{1}{4}\cos 3kt \int_0^{2\pi} g_3(\tau)\sin 3k\tau d\tau = f_k(t), \qquad (3.2.20)$$

$$\frac{1}{2}\sin kt \int_0^{2\pi} g_1(\tau)\cos k\tau d\tau - \frac{1}{2}\cos kt \int_0^{2\pi} g_1(\tau)\sin k\tau d\tau +$$
$$+\frac{1}{8}\int_0^{2\pi} g_2(\tau)d\tau - \frac{1}{4}\cos 2kt \int_0^{2\pi} g_2(\tau)\cos 2k\tau d\tau -$$
$$-\frac{1}{4}\sin 2kt \int_0^{2\pi} g_2(\tau)\sin 2k\tau d\tau + \frac{3}{2^5}\sin kt \int_0^{2\pi} g_3(\tau)\cos k\tau d\tau -$$
$$-\frac{3}{2^5}\cos kt \int_0^{2\pi} g_3(\tau)\sin k\tau d\tau -$$
$$-\frac{1}{2^5}\sin 3kt \int_0^{2\pi} g_3(\tau)\cos 3k\tau d\tau +$$
$$+\frac{1}{2^5}\cos 3kt \int_0^{2\pi} g_3(\tau)\sin 3k\tau d\tau = f_k^*(t). \qquad (3.2.21)$$

Обозначив $a_k(k{=}0,1,\ldots,)$, $b_k(k{=}1,2,\ldots,)$ и $a_k^*(k{=}0,1,\ldots)$, $b_k^*(k{=}1,2,\ldots)$ – коэффициенты Фурье функций, полученных периодическим (с периодом 2π) продолжением функций $f_k(t)$ и $f_k^*(t)$ на числовую ось, из уравнений (3.2.20) и (3.2.21) имеем

$$a_k = -\int_0^{2\pi} g_1(\tau)\sin k\tau d\tau - \frac{3}{4}\int_0^{2\pi} g_3(\tau)\sin k\tau d\tau,$$

$$a_k^* = -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} g_1(\tau)\sin k\tau d\tau - \frac{3}{2^5}\int_0^{2\pi} g_3(\tau)\sin k\tau d\tau, \qquad (3.2.22)$$

$$b_k = \int_0^{2\pi} g_1(\tau)\cos k\tau d\tau + \frac{3}{4}\int_0^{2\pi} g_3(\tau)\cos k\tau d\tau,$$

$$b_k^* = -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} g_1(\tau)\cos k\tau d\tau + \frac{3}{2^5}\int_0^{2\pi} g_3(\tau)\cos k\tau d\tau. \qquad (3.2.23)$$

Так как определители систем уравнений (3.2.22) и (3.2.23) отличны от нуля, то из этих уравнений однозначно определяются функционалы

$$\int_0^{2\pi} g_3(\tau)\sin k\tau d\tau, \int_0^{2\pi} g_1(\tau)\sin k\tau d\tau,$$

$$\int_0^{2\pi} g_3(\tau)\cos k\tau d\tau, \int_0^{2\pi} g_1(\tau)\cos k\tau d\tau,$$

$$k = 1, 2, \ldots, N.$$

Функционалы

$$\int_0^{2\pi} g_2(\tau)d\tau;$$

$$\int_0^{2\pi} g_2(\tau)\sin 2k\tau d\tau, \int_0^{2\pi} g_2(\tau)\cos 2k\tau d\tau,\ k = 1, 2, \ldots, [N/2];$$

$$\int_0^{2\pi} g_3(\tau)\sin 3k\tau d\tau, \int_0^{2\pi} g_3(\tau)\cos 3k\tau d\tau,\ k = 1, \ldots, [N/3],$$

определяются из уравнения (3.2.20).

Для нахождения функционалов

$$\int_0^{2\pi} g_1(\tau)d\tau \text{ и } \int_0^{2\pi} g_3(\tau)d\tau$$

подаем на вход системы сигналы

$$x_0(t) = \begin{cases} 1 \text{ при } t \geq 0, \\ 0 \text{ при } t < 0; \end{cases}$$

$$x_0^1(t) = x_0(t)/2$$

и из получающейся в результате системы уравнений находим эти функционалы.

Для вычисления функционалов

$$\int_0^{2\pi} g_2(\tau)\sin k\tau d\tau, \int_0^{2\pi} g_2(\tau)\cos k\tau d\tau,\ k = 1, 3, \ldots$$

подадим на вход системы сигналы

$$x_k(t) = \begin{cases} \sin\frac{k}{2}t \text{ при } t \geq 0, \\ 0 \text{ при } t < 0, \end{cases} \quad k = 1, 3, \ldots,$$

и повторим неоднократно описанные выше действия.

В результате описанной процедуры оказались вычисленными коэффициенты Фурье функций $g_1(t), g_2(t), g_3(t)$ и тем самым восстановлены сами функции.

Замечание 3.2.1. *Рассмотрение случаев, когда функции $g_1(t)$, $g_2(t)$, $g_3(t)$ отличны от нуля на сегменте $[a, b]$, включающем в себя сегмент $[0, 2\pi]$, проводится аналогично.*

3.2.2.3. Точность метода

Исследование точности изложенных выше алгоритмов начнем с линейного случая. Для получения соответствующих оценок необходима предварительная информация о гладкости функции $g(t)$. Отметим сразу, что простого утверждения, что функция $g(t)$ непрерывна, недостаточно даже для утверждения о сходимости метода, так как известны примеры непрерывных функций, ряды Фурье которых не сходятся к самим функциям (подробности см. например, в [6]). Таким образом, будем исследовать точность метода при предположениях, что:

1) функция $g(t) \in H_\alpha(A)$, т.е. $g(t)$, определенная на сегменте $[a,b]$, удовлетворяет неравенству $\mid g(t_1) - g(t_2) \mid \leq A \mid t_1 - t_2 \mid^\alpha$;

2) функция $g(t) \in W^r(A)$, т.е. функция $g(t)$ на соответствующем сегменте $[a,b]$ имеет $(r-1)$ непрерывную производную и кусочно-непрерывную производную порядка r, удовлетворяющую неравенству $\max_t \mid g^{(r)}(t) \mid \leq A$.

Пусть вначале $g(t) \in H_\alpha(1)$. Обозначим через $S_N(t)$ N-ю частную сумму ряда Фурье функции $g(t)$:

$$S_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=0}^{N} a_k \cos kt + b_k \sin kt,$$

где $a_k, k = 0, 1, \ldots, N, b_k, k = 1, 2 \ldots, N$, – коэффициенты Фурье функции $g(t)$. Известно [88, с. 179], что на классе $H_\alpha(1)$ справедлива оценка

$$\max_t \mid g(t) - S_N(t) \mid \sim (4\pi^{-2}) N^{-\alpha} \ln N.$$

Если $g(t) \in W^r(1)$, то [88, с. 180] известна оценка

$$\max_t \mid g(t) - S_N(t) \mid \sim N^{-r} (8\pi^{-2} k(e^{-r/N}),$$

где $k(x) = \int\limits_0^{\pi/2} (1 - x^2 \sin^2 t)^{1/2} dt$ – полный эллиптический интеграл первого рода.

Из этих оценок следует, что для вычисления $g(t)$ с точностью ε достаточно взять $N = A[(\frac{\ln|\varepsilon|}{\varepsilon})^{1/\alpha}]$ в случае, когда $g(t) \in H_\alpha(1)$ и $N = A\left[(\frac{\ln|\varepsilon|}{\varepsilon})^{1/r}\right]$ в случае, когда $g(t) \in W^r(1)$. Целые числа N определяют число входных сигналов $x_k = \sin kt, k = 1, 2, \ldots, N$, которые нужно подать на вход системы для получения заданной точности ε. В случае, если на вход подается один входной сигнал, то он должен содержать все гармоники до N-го порядка.

3.3. Идентификация измерительных преобразователей в процессе эксплуатации

Изложенный выше метод может быть использован для идентификации измерительных преобразователей в процессе эксплуатации путем подачи на вход преобразователя дополнительного тестового сигнала. В случае, если входной сигнал можно считать стационарным по сравнению с аддитивно добавленным тестовым сигналом,

справедливы проведенные выше рассуждения. В случае, если входной сигнал изменяется достаточно быстро, то в качестве аддитивного тестового сигнала нужно использовать импульсный сигнал и специальные методы обработки выходного сигнала, основанные на аналитическом продолжении.

Рассмотрим модельные примеры. Вначале рассмотрим идентификацию параметров линейного преобразователя.

Пример 3.3.1. Рассмотрим измерительный преобразователь, функционирование которого описывается уравнением

$$\int_0^t g(t-\tau)x(\tau)d\tau = f(t), \tag{3.3.1}$$

где

$$g(t) = \begin{cases} t \ \text{ при } 0 \le t \le 1, \\ 1-t \ \text{ при } 1 \le t \le 2, \\ 0 \ \text{ при остальных значениях } t. \end{cases}$$

Требуется определить ИПФ $g(t)$.

Решение. Подадим на вход преобразователя периодический сигнал $x(t) = \pi^2 - t^2$, $-\pi \le t \le \pi$. Ряд Фурье функции $x(t)$ равен [72, с. 269]:

$$x(t) = \frac{2}{3}\pi^2 + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nt.$$

Отметим, что можно также воспользоваться легко реализуемой функцией $x_1(t) = t\sin t$, $-\pi \le t \le \pi$. Ряд Фурье этой функции равен [72, с. 270]:

$$x_1(t) = 1 - \frac{1}{2}\cos t + 2\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2-1}\cos nt.$$

Выходной сигнал $f(t)$ при подаче на вход сигнала $x(t)$ равен

$$f(t) = \frac{2}{3}\pi^2 \int_0^{2\pi} g(\tau)d\tau +$$

$$+4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \left(\cos nt \int_0^{2\pi} g(\tau)\cos n\tau d\tau + \sin nt \int_0^{2\pi} g(\tau)\sin n\tau d\tau \right).$$

Дискретизируя выходной сигнал $f(t)$ по узлам $t_k = 4\pi + \frac{2k\pi}{2N+1}$, где N – достаточно большое целое число, имеем

$$\int_0^{2\pi} g(\tau)d\tau = \frac{3}{2\pi^2(2N+1)} \sum_{k=0}^{2N} f(t_k),$$

$$\int_0^{2\pi} g(\tau)\sin l\tau d\tau = (-1)^{l+1}\frac{l^2}{2(2N+1)} \sum_{k=0}^{2N} f(t_k)\sin lt_k,$$

$$\int_0^{2\pi} g(\tau)\cos l\tau d\tau = (-1)^{l+1}\frac{l^2}{2(2N+1)} \sum_{k=0}^{2N} f(t_k)\cos lt_k,$$

где $l = 1, 2, \ldots$

Таким образом, получены коэффициенты Фурье функции $g(t)$.

Пример 3.3.2. Рассмотрим нелинейный измерительный преобразователь, функционирование которого описывается уравнением

$$\sum_{k=1}^{3} \int_0^t g_k(t-\tau)x^k(\tau)d\tau = f(t),$$

где

$$g_1(t) = \begin{cases} t \text{ при } 0 \le t \le 1, \\ 1-t \text{ при } 1 \le t \le 2, \\ 0 \text{ при остальных значениях } t; \end{cases}$$

$$g_2(t) = \begin{cases} \sin t \text{ при } 0 \le t \le \pi, \\ 0 \text{ при остальных значениях } t; \end{cases}$$

$$g_3(t) = \begin{cases} \frac{1-(t-1)^2}{2} \text{ при } 0 \le t \le 2, \\ 0 \text{ при остальных значениях } t. \end{cases}$$

Требуется по реакции преобразователя на тестовые сигналы определить функции $g_i(t), i = 1, 2, 3$, с точностью 10^{-1}.

Функции $g_i(t) \in H_1(1), i = 1, 2, 3$. Предположим, что эта информация известна заранее. В этом случае достаточно положить $N = 6$ для достижения точности 10^{-1}.

Решение. Подадим на вход измерительного преобразователя один из сигналов $x_k(t) = \sin kt, k = 1, 2, \ldots, 6$. Выходной сигнал имеет вид

$$f_k(t) = \sin kt \int\limits_0^{2\pi} g_1(\tau)\cos k\tau d\tau - \cos kt \int\limits_0^{2\pi} g_1(\tau)\sin k\tau d\tau +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} g_2(\tau)d\tau - \frac{1}{2}\cos 2kt \int\limits_0^{2\pi} g_2(\tau)\cos 2k\tau d\tau -$$

$$-\frac{1}{2}\sin 2kt \int\limits_0^{2\pi} g_2(\tau)\sin 2k\tau d\tau +$$

$$+\frac{3}{4}\sin kt \int\limits_0^{2\pi} g_3(\tau)\cos k\tau d\tau - \frac{3}{4}\cos kt \int\limits_0^{2\pi} g_3(\tau)\sin k\tau d\tau -$$

$$-\frac{1}{4}\sin 3kt \int\limits_0^{2\pi} g_3(\tau)\cos 3k\tau d\tau + \frac{1}{4}\cos 3kt \int\limits_0^{2\pi} g_3(\tau)\sin 3k\tau d\tau.$$

Дискретизируем функцию $f_k(t)$ по узлам $t_l = 2\pi + \dfrac{2l\pi}{2N_1+1)}$, $l = 0, 1, \ldots, N_1$, $N_1 \geq 3N$.

Пусть $k = 1$. Учитывая, что тригонометрическая система

$$1, \sin t, \cos t, \ldots, \sin nt, \cos nt, \ldots,$$

ортогональна $\left(\int\limits_0^{2\pi} \sin kt \sin ltdt = 0 \text{ при } k \neq l \text{ и т.д.}\right)$, имеем приближенные соотношения:

$$\int\limits_0^{2\pi} g_2(\tau)d\tau = \frac{2}{2N_1+1}\sum_{l=0}^{2N_1+1} f_k(t_l),$$

$$\int\limits_0^{2\pi} g_2(\tau)\sin 2k\tau d\tau = -\frac{4}{2N_1+1}\sum_{l=0}^{2N_1} f_k(t_l)\sin 2kt_l,$$

$$\int\limits_0^{2\pi} g_2(\tau)\cos 2k\tau d\tau = -\frac{4}{2N_1+1}\sum_{l=0}^{2N_1} f_k(t_l)\cos 2kt_l,$$

$$\int_0^{2\pi} g_3(\tau)\sin 3k\tau d\tau = \frac{8}{2N_1+1}\sum_{l=0}^{2N_1} f_k(t_l)\sin 3kt_l,$$

$$\int_0^{2\pi} g_3(\tau)\cos 3k\tau d\tau = -\frac{8}{2N_1+1}\sum_{l=0}^{2N_1} f_k(t_l)\cos 3kt_l,$$

где $k = 1, 2, \ldots$

Для нахождения коэффициентов Фурье

$$\int_0^{2\pi} g_1(\tau)\sin k\tau d\tau, \int_0^{2\pi} g_3(\tau)\sin k\tau d\tau$$

нужно наряду с сигналом $x_k(t)$ подать на вход сигнал $x_k^1(t) = \frac{1}{2}x_k(t)$ и решить систему уравнений:

$$-\int_0^{2\pi} g_1(\tau)\sin k\tau d\tau - \frac{3}{4}\int_0^{2\pi} g_3(\tau)\sin k\tau d\tau = \frac{2}{2N_1+1}\sum_{l=0}^{2N_1} f_k(t_l)\cos kt_l$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} g_1(\tau)\sin k\tau d\tau - \frac{3}{2^5}\int_0^{2\pi} g_3(\tau)\sin k\tau d\tau\frac{2}{2N_1+1}\sum_{l=0}^{2N_1} f_k^1(t_l)\cos kt_l,$$

где $f_k^1(t)$ – реакция преобразователя на входной сигнал $x_k^1(t)$.

Аналогичным образом вычисляются коэффициенты Фурье:

$$\int_0^{2\pi} g_1(\tau)\cos k\tau d\tau, \int_0^{2\pi} g_3(\tau)\cos k\tau d\tau.$$

Аналогично, при подаче на вход сигналов $z_k(t) = \sin\left(\frac{kt}{2}\right)$ определяются коэффициенты Фурье:

$$\int_0^{2\pi} g_2(\tau)\sin k\tau d\tau, \int_0^{2\pi} g_2(\tau)\cos k\tau d\tau.$$

Для определения коэффициента $\int_0^{2\pi} g_1(\tau)d\tau$ на вход преобразователя подается единичный скачок. Можно также использовать входные сигналы, описанные в предыдущем примере.

3.4. Идентификации нелинейных многомерных систем

В процессе разработки и при эксплуатации нелинейных систем возникает задача идентификации их элементов. Различным аспектом этой проблемы посвящено большое число публикаций. Основные методы идентификации нелинейных систем и подробная библиография содержатся в монографиях [48, 71, 120, 167, 168].

В данном разделе рассматривается метод идентификации нелинейных измерительных преобразователей, описываемых нелинейными уравнениями в свертках. В частности, такими уравнениями описываются преобразователи, состоящие из линейного инерционного звена и параллельно соединенных нелинейных блоков. Идентификация проводится подачей на вход нескольких легко реализуемых функций. Изложение проводится для многомерного случая.

Рассмотрим динамическую систему, функционирование которой описывается уравнением

$$\sum_{k=1}^{N} a_k \left(\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} g(t_1-\tau_1, \dots, t_l-\tau_l) x(\tau_1, \dots, \tau_l) d\tau_1 \dots d\tau_l \right)^k =$$

$$= f(t_1, \dots, t_l), \quad \text{где} \quad a_1 = 1. \tag{3.4.1}$$

Условие $a_1 = 1$ представляется естественным, так как всегда можно ввести аппаратную функцию $g_1(t_1, \dots, t_l) = a_1 g(t_1, \dots, t_l)$ и удовлетворить этому условию.

Здесь $x(t_1, \dots, t_l)$ – входной сигнал, $f(t_1, \dots, t_l)$ – выходной сигнал, $g(t_1, \dots, t_l)$ – импульсная переходная функция (аппаратная функция).

Отметим, что рассматривается случай, когда аппаратная функция $g(t_1, \dots, t_l)$ не обязательно удовлетворяет условиям каузальности [151].

Ставится задача: располагая реакциями устройства, описываемого уравнением (3.4.1), на N входных сигналов, определить неизвестные коэффициенты $a_k (k = 2, \dots, N)$ и функцию $g(t_1, \dots, t_k)$ (в дальнейшем для краткости будем писать просто «реакциями устройства (3.4.1)»).

Обозначим через $\varphi(t_1, \dots, t_l)$ достаточно просто реализуемую финитную функцию с носителем $[0, T]^l$.

Подадим на вход устройства (3.4.1) серию входных сигналов:

$$x_m(t_1,\dots,t_l)=\frac{1}{2^m}\varphi(t_1,\dots,t_l), m=0,1,\dots,N-1.$$

В результате получаем систему нелинейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2^{mk}}a_k\left(\int_{-\infty}^{\infty}\dots\int_{-\infty}^{\infty}g(t_1-\tau_1,\dots,t_l-\tau_l)\varphi(\tau_1,\dots,\tau_l)d\tau_1\dots d\tau_l\right)^k=$$

$$=\psi_n(t_1,\dots,t_l),\ m=0,1,\dots,N-1. \qquad (3.4.2)$$

Введем новые неизвестные функции:

$$z_k(t_1,\dots,t_l)=$$

$$=a_k\left(\int_{-\infty}^{\infty}\dots\int_{-\infty}^{\infty}g(t_1-\tau_1,\dots,t_l-\tau_l)\varphi(\tau_1,\dots,\tau_l)d\tau_1\dots.d\tau_l\right)^k,$$

$$k=1,2,\dots,N.$$

Тогда система уравнений (3.4.2) может быть представлена в виде

$$\sum_{k=1}^{N}2^{-km}z_k(t_1,\dots,t_l)=\psi_m(t_1,\dots,t_l),\ m=0,1,\dots,N-1. \qquad (3.4.3)$$

Определитель этой системы равен [137, пример 343]:

$$\lambda=(-1)^{N-1}\prod_{i=1}^{N}2^{-i}\prod_{1\le k<i\le N}(2^{-i}-2^{-k})\left[\sum_{i=1}^{N}2^{-i}(f(2^i))^{-i}\right],$$

где $f(x)=(x-x_1),\dots,(x-x_N), x_k=2^{-k}, k=1,2,\dots,N$, и, следовательно, $\lambda\neq 0$.

По теореме Крамера система (3.4.3) имеет единственное решение:

$$z_k(t_1,\dots,t_l)=\gamma_k(t_1,\dots,t_N), k=1,\dots,N. \qquad (3.4.4)$$

Так как

$$z_1(t_1,\dots,t_l)=\int_{-\infty}^{\infty}\dots\int_{-\infty}^{\infty}g(t_1-\tau_1,\dots,t_l-\tau_l)\varphi(\tau_1,\dots,\tau_l)d\tau_1\dots d\tau_l,$$

...

$$z_k(t_1,\dots,t_l) =$$

$$= a_k \left(\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} g(t_1-\tau_1,\dots,t_l-\tau_l)\varphi(\tau_1,\dots,\tau_l)d\tau_1\dots d\tau_l \right)^k ,$$

$$k = 2,\dots,N,$$

то

$$a_k = \frac{z_k(t_1,\dots,t_l)}{(z_1(t_1,\dots,t_l))^k}\frac{\gamma_k(t_1,\dots,t_l)}{\gamma_1(t_1,\dots,t_l))^k}, k = 2,\dots,N.$$

После того как определены коэффициенты a_k, $k = 1, \dots, N$, приступим к определению функции $g(t_1,\dots,t_l)$.

Для этого предлагается два приближенных итерационных метода: первый из них предназначен для вычислений во временной области, а второй – частотной.

Начнем с частотного метода. Рассмотрим уравнение

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots\dots \int_{-\infty}^{\infty} g(t_1-\tau_1,\dots,t_l-\tau_l)\varphi(\tau_1,\dots,\tau_l)d\tau_1\dots d\tau_l =$$

$$= \gamma_1(t_1,\dots,t_l). \tag{3.4.5}$$

Применим к уравнению (3.4.5) преобразование Фурье. В результате получаем уравнение

$$G(\omega_1,\dots,\omega_l)\Psi(\omega_1,\dots,\omega_l) = \Gamma(\omega_1,\dots,\omega_l), \tag{3.4.6}$$

где $G(\omega_1,\dots,\omega_l), \Psi(\omega_1,\dots,\omega_l), \Gamma(\omega,\dots,\omega_l)$ – преобразования Фурье функций $g(t_1,\dots,t_l), \varphi(t_1,\dots,t_l), \gamma_1(t_1,\dots,t_l)$ соответственно.

Пусть h – неотрицательное число, M – положительное целое число. Уравнение (3.4.6) будем решать на сетке $\Omega = (\omega_1^{k_1},\dots,\omega_l^{k_l})$, где $\omega_i^{k_i} = k_i h$, $k_i = -M,\dots,-1,0,1,\dots,M, i = 1,2\dots,l$.

Для определения значений $\Psi(\omega_1,\dots,\omega_l)$ в узлах сетки Ω используем следующий итерационный метод.

Зафиксируем произвольный узел $(\omega_1^{k_l},\dots,\omega_l^{k_l})$. Пусть функция $\Psi(\omega_1^{k_1},\dots,\omega_l^{k_l}) \neq 0$. Тогда существует комплексное число $\alpha_{k_1,\dots,k_l}$ такое, что

$$\arg(\alpha_{k_1,\dots,k_l}\Psi(\omega_1^{k_1},\dots,\omega_l^{k_l})) = 0,$$

$$\alpha_{k_1,\dots,k_l}\Psi(\omega_1^{k_1},\dots,\omega_l^{k_l}) = q,\ 0 < q < 1.$$

Для вычисления значения $G(\omega_1^{k_1},\dots,\omega_l^{k_l})$ применяется итерационный метод

$$G_{m+1}(\omega_1^{k_1},\dots,\omega_l^{k_l}) = G_m(\omega_1^{k_1},\dots,\omega_l^{k_l}) -$$
$$-\alpha_{k_1,\dots,k_l}(\Psi(\omega_1^{k_1},\dots,\omega_l^{k_l})G_m(\omega_1^{k_1},\dots,\omega_l^{k_l}) - \gamma_1(\omega_1^{k_1},\dots,\omega_l^{k_l})). \quad (3.4.7)$$

Докажем сходимость итерационного процесса (3.4.7).

Нетрудно видеть, что

$$\mid G_{m+1}(\omega_1^{k_1},\dots,\omega_l^{k_l}) - G_m(\omega_1^{k_1},\dots,w_l^{k_l}) \mid =$$
$$= \mid G_m(\omega_1^{k_1},\dots,\omega_l^{k_l}) - G_{m-1}(\omega_1^{k_1},\dots,\omega_l^{k_l}) -$$
$$-\alpha_{k_1,\dots,k_l}\Phi(\omega_1^{k_1},\dots,\omega_l^{k_l})\left(G_m(\omega_1^{k_1},\dots,\omega_l^{k_l}) - G_{m-1}(\omega_1^{k_1},\dots,\omega_l^{k_l})\right) \mid =$$
$$= \mid 1-\alpha_{k_1,\dots,k_l}\Phi(\omega_1^{k_1},\dots,\omega_l^{k_l}) \mid\mid G_m(\omega_1^{k_1},\dots,\omega_l^{k_l}) - G_{m-1}(\omega_1^{k_1},\dots,\omega_l^{k_l}) \mid \leq$$
$$\leq q \mid G_m(\omega_1^{k_1},\dots,\omega_l^{k_l}) - G_{m-1}(\omega_1^{k_1},\dots,\omega_l^{k_l}) \mid \leq$$
$$\leq q^m \mid G_1(\omega_1^{k_1},\dots,\omega_l^{k_l}) - G_0(\omega_1^{k_1},\dots,\omega_l^{k_l}) \mid .$$

Из полученного неравенства следует, что выполнены условия теоремы Банаха о неподвижной точке (см. разд. 1.3.1) и, следовательно, итерационный процесс (3.4.7) сходится.

В случае, если $\Psi(\omega_1^{k_1},\dots,\omega_l^{k_l}) = 0$, то значения $G(\omega_1^{k_1},\dots,\omega_l^{k_l})$ не вычисляются. Известно [165], что если уравнение (3.4.5) имеет единственное решение, то функция $\Psi(\omega_1,\dots\omega_l)$ может обращаться в нуль только в конечном числе точек.

Вычислив по формуле (3.4.7) значение $G(\omega_1,\dots\omega_l)$ в узлах сетки Ω, функцию $g(t_1,\dots,t_l)$ вычисляем по формуле

$$g(t_1,\dots,t_l) =$$
$$= \frac{h^l}{(2\pi)^{l/2}} \sum_{k_1=-M}^{M-1} \cdots \sum_{k_l-M}^{M-1} G(\omega_1^{k_1},\dots,\omega_l^{k_l}) e^{-ih(k_1t_1+\cdots+k_lt_l)} + R_l(g).$$

Рассмотрим первый метод. Для простоты обозначений ограничимся случаем, когда $l = 2$.

Обозначим через $\Phi(\omega_1,\omega_2), G(\omega_1,\omega_2), \Gamma(\omega_1,\omega_2)$ преобразования Фурье функций $\varphi(t_1,t_2), g(t_1,t_2), \gamma(t_1,t_2)$.

Введем условие A, которое заключается в следующем:

1) множество значений функций $\Phi(\omega_1,\omega_2)$ при изменении аргументов (ω_1,ω_2) в области $-\infty < \omega_1,\omega_2 < \infty$ расположено внутри угла раствора, меньшего π, с вершиной в начале координат;

2) функция $\Phi(\omega_1,\omega_2) \neq 0$ при конечных значениях ω_1 и ω_2.

Из условия A следует, что существует такое комплексное число α, при котором

$$\max_{|\omega_i|\le\infty,i=1,2} \mid 1-\alpha\Phi(\omega_1,\omega_2)\mid = q \le 1.$$

Отсюда следует,что существует достаточно большое число T при котором выполняеся неравенство

$$\max_{|\omega_i|\le T,i=1,2} \mid 1-\alpha\Phi(\omega_1,\omega_2)\mid = q < 1. \tag{3.4.8}$$

Пусть функция $\Gamma(\omega_1,\omega_2)$ финитна и ее носитель расположен в квадрате $[-T,T;-T,T]$.

Рассмотрим итерационный процесс

$$g_{n+1}(t_1,t_2) = g_n(t_1,t_2) -$$

$$-\alpha\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(t_1-\tau_1,t_2-\tau_2)g_n(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2 + \alpha\gamma_1(t_1,t_2)),$$

взяв в качестве начального приближения функцию $g_0(t_1,t_2)$, спектр которой расположен в квадрате $[-T,T;-T,T]$.

Теорема 3.4.1. *Пусть выполнено условие A, функция $\Gamma(\omega_1,\omega_2)$ финитна и справедливо неравенство* (3.4.8). *Последовательные приближения $g_{n+1}(t_1,t_2)$ сходятся к аппаратной функции $g(t_1,t_2)$ в метрике пространства $L_2((-\infty,\infty)^2)$ с точностью*

$$\parallel g(t_1,t_2) - g_{n+1}(t_1,t_2) \parallel = C(q^{n+1}+\varepsilon),$$

где

$$\varepsilon = \int\limits_{-\infty}^{-T}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mid G(\omega_1,\omega_2)\mid^2 d\omega_1 d\omega_2 + \int\limits_{T}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mid G(\omega_1,\omega_2)\mid^2 d\omega_1 d\omega_2 +$$

$$+\int\limits_{-T}^{T}\int\limits_{-\infty}^{T} \mid G(\omega_1,\omega_2)\mid^2 d\omega_1 d\omega_2 + \int\limits_{-T}^{T}\int\limits_{-T}^{\infty} \mid G(\omega_1,\omega_2)\mid^2 d\omega_1 d\omega_2.$$

Предположим, что условие A не выполняется. Разобьем плоскость (ω_1,ω_2) на конечное число прямоугольников $\Lambda_{kl} = [v_k, v_{k+1}; w_l, w_{l+1}]$, $k = 1,2,\ldots,N_1$, $l = 1,2,\ldots,N_2$ (причем v_1, v_{N_1},w_1, w_{N_1} принимают значения, равные $\pm\infty$), таким образом, чтобы при изменении аргументов (ω_1,ω_2) в прямоугольнике Λ_{kl} значения $G(\omega_1,\omega_2)$ были расположены внутри (и, возможно, в вершине) угла раствора,

меньшего π, с вершиной в начале координат плоскости комплексной переменной.

Обозначим через $E_{kl}(\omega_1, \omega_2)$ характеристическую функцию области Λ_{kl}, т.е.

$$E_{kl}(\omega_1, \omega_2) = 0, \text{ если } (\omega_1, \omega_2) \notin \Lambda_{kl},$$

и

$$E_{kl}(\omega_1, \omega_2) = 1, \text{ если } (\omega_1, \omega_2) \in \Lambda_{kl}.$$

Обозначим через $\Gamma_{kl}(\omega_1, \omega_2)$ функцию $\Gamma(\omega_1, \omega_2)E_{kl}(\omega_1, \omega_2)$, а через $\gamma_{kl}(t_1, t_2)$ – прообраз функции $\Gamma_{kl}(\omega_1, \omega_2)$.

Каждому прямоугольнику Λ_{kl} поставим в соответствие такое комплексное число α_{kl}, при котором

$$\sup_{(\omega_1,\omega_2)\in\Lambda_{kl}} \mid 1 - \alpha_{kl}\Phi(\omega_1, \omega_2) \mid \leq q_{kl} \leq 1.$$

Рассмотрим последовательность

$$g_{n+1,kl}(t_1, t_2) = \beta_n g_{n,kl}(t_1, t_2) + (1 - \beta_n)g_{n,kl}(t_1, t_2) -$$
$$-\alpha_{kl} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t_1 - \tau_1, t_2 - \tau_2)g_{n,kl}(\tau_1, t_2)d\tau_1 d\tau_2 +$$
$$+\alpha_{kl}\gamma_{kl}(t_1, t_2)), \quad k = 1, \ldots, N_1, l = 1, 2, \ldots, N_2, \tag{3.4.9}$$

где $0 < \beta_* < \beta_n < \beta^* < 1$.

Ниже будет доказано, что $g_{n,kl}(t_1, t_2)$ – последовательности функций сходятся в метрике пространства $L_2(-\infty, \infty; -\infty, \infty)$ к функциям $g^*_{kl}(t_1, t_2)$, k=0, 1, ..., N_1, l=0, 1, ..., N_2.

Пусть $g^*(t_1, t_2) = \sum\limits_{k=0}^{N_1}\sum\limits_{l=0}^{N_2} g^*_{kl}(t_1, t_2)$.

Теорема 3.4.2. *Пусть $g(t_1, t_2)$– аппаратная функция, тогда*

$$g(t_1, t_2) = g^*(t_1, t_2).$$

Предыдущее утверждение можно усилить. Пусть T – достаточно большое число, при котором выполняеся неравенство

$$\int_{-\infty}^{-T}\int_{-\infty}^{\infty} \mid G(\omega_1, \omega_2) \mid^2 d\omega_1 d\omega_2 + \int_{T}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mid G(\omega_1, \omega_2) \mid^2 d\omega_1 d\omega_2 +$$

$$+\int_{-T}^{T}\int_{-\infty}^{-T} \mid G(\omega_1,\omega_2)\mid^2 d\omega_1 d\omega_2+\int_{-T}^{T}\int_{T}^{\infty} \mid G(\omega_1,\omega_2)\mid^2 d\omega_1 d\omega_2 \le \varepsilon.$$

Разобьем плоскость (ω_1,ω_2) на конечное число прямоугольников $\Lambda_{kl}=[v_k,v_{k+1};w_l,w_{l+1}]$, $k=1,2,\ldots,N_1, l=1,2,\ldots,N_2$, причем v_1, v_{N_1}, w_1, w_{N_1} принимают значения, равные $\pm T$, таким образом, чтобы при изменении аргументов (ω_1,ω_2) в прямоугольнике Λ_{kl} значения $G(\omega_1,\omega_2)$ были расположены внутри угла раствора, меньшего π, с вершиной в начале координат плоскости комплексной переменной.

Каждому прямоугольнику Λ_{kl} ставится в соответствие такое комплексное число α_{kl}, при котором

$$\sup_{(\omega_1,\omega_2)\in\Lambda_{kl}} \mid 1-\alpha_{kl}\Phi(\omega_1,\omega_2)\mid \le q_{kl}<1.$$

Пусть $q=\max q_{kl}$, тогда $q<1$.

Рассмотрим последовательность

$$g_{n+1,kl}(t_1,t_2)=g_{n,kl}(t_1,t_2)-$$
$$-\alpha_{kl}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t_1-\tau_1,t_2-\tau_2)g_{n,kl}(\tau_1,t_2)d\tau_1 d\tau_2+$$
$$+\alpha_{kl}\gamma_{kl}(t_1,t_2)), \qquad (3.4.10)$$
$$k=1,\ldots,N_1, l=1,2,\ldots,N_2, n=1,\ldots$$

Ниже будет доказано,что последовательность $g_{n,kl}(t_1,t_2)$ сходится в метрике пространства $L_2(-\infty,\infty;-\infty,\infty)$ к функциям $g^*_{kl}(t_1,t_2)$ и $g(t_1,t_2)=\sum\limits_{k=0}^{N_1-1}\sum\limits_{l=0}^{N_2-1} g^*_{kl}(t_1,t_2)+C\varepsilon$, где

$$\varepsilon=\int_{-\infty}^{-T}\int_{-\infty}^{\infty} \mid G(\omega_1,\omega_2)\mid^2 d\omega_1 d\omega_2+\int_{T}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mid G(\omega_1,\omega_2)\mid^2 d\omega_1 d\omega_2+$$
$$+\int_{-T}^{T}\int_{-\infty}^{T} \mid G(\omega_1,\omega_2)\mid^2 d\omega_1 d\omega_2+\int_{-T}^{T}\int_{T}^{\infty} \mid G(\omega_1,\omega_2)\mid^2 d\omega_1 d\omega_2.$$

Пусть $g^*_{N_1N_2}(t_1,t_2)=\sum\limits_{k=0}^{N_1-1}\sum\limits_{l=0}^{N_2-1} g^*_{kl}(t_1,t_2)$.

Теорема 3.4.3. *Пусть $g(t_1,t_2)-$ аппаратная функция, тогда*

$$g(t_1,t_2)=g^*_{N_1N_2}(t_1,t_2)+C\varepsilon,$$

где величина ε определена выше.

Доказательство теоремы 3.4.1.

Близость последовательных приближений в метрике пространства $L_2(-\infty,\infty;-\infty,\infty)$ оценивается неравенством

$$\| g_{n+1}(t_1,t_2)-g_n(t_1,t_2)\|=\| (g_n(t_1,t_2)-g_{n-1}(t_1,t_2))-$$

$$-\alpha\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Psi(t_1-\tau_1,t_2-\tau_2)(g_n(\tau_1,\tau_2)-g_{n-1}(\tau_1,\tau_2))d\tau_1d\tau_2\|=$$

$$=\| G_n(\omega_1,\omega_2)-G_{n-1}(\omega_1,\omega_2)-\alpha\Psi(\omega_1,\omega_2)(G_n(\omega_1,\omega_2)-$$
$$-G_{n-1}(\omega_1,\omega_2))\|\leq$$

$$\leq\max_{|\omega_i|\leq T,i=1,2}|1-\alpha\Psi(\omega_1,\omega_2)\|G_n(\omega_1,\omega_2)-G_{n-1}(\omega_1,\omega_2)\|\leq$$

$$\leq q\|G_n(\omega_1,\omega_2)-G_{n-1}(\omega_1,\omega_2)\|\leq q\|g_n(t_1,t_2)-g_{n-1}(t_1,t_2)\|.$$

Из этого неравенства и теоремы Банаха о неподвижной точке (см. разд. 1.3) следует справедливость теоремы.

Доказательство теоремы 3.4.2.

Вначале докажем сходимость итерационного процесса (3.4.9). В метрике пространства $L_2(-\infty,\infty;-\infty,\infty)$ справедлива оценка

$$\| g_{n+1,kl}(t_1,t_2)-g_{n,kl}(t_1,t_2)\|=$$

$$=|\beta_n|\| g_{n,kl}(t_1,t_2)-g_{n-1,kl}(t_1,t_2)\|+$$

$$+|1-\beta_n|\| g_{n,kl}(t_1,t_2)-g_{n-1,kl}(t_1,t_2)-$$

$$-\alpha_{kl}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(t_1-\tau_1,t_2-\tau_2)(g_{n,kl}(\tau_1,\tau_2)-g_{n-1,kl}(\tau_1,\tau_2))d\tau_1d\tau_2\|=$$

$$=\mid \beta_n \mid\mid\mid g_{n,kl}(t_1,t_2) - g_{n-1,kl}(t_1,t_2) \mid\mid +$$

$$+ \mid 1-\beta_n \mid\mid\mid (G_{n,kl}(\omega_1,\omega_2) - G_{n-1,kl}(\omega_1,\omega_2)) -$$

$$-\alpha_{kl}\Psi(\omega_1,\omega_2)(G_{n,kl}(\omega_1,\omega_2) - G_{n-1,kl}(\omega_1,\omega_2)) \mid\mid \leq$$

$$\leq \mid \beta_n \mid\mid\mid g_{n,kl}(t_1,t_2) - g_{n-1,kl}(t_1,t_2) \mid\mid +$$

$$+ \mid 1-\beta_n \mid \max_{(\omega_1,\omega_2)\in\Lambda_{kl}} \mid 1-\alpha_{kl}\Phi(\omega_1,\omega_2) \mid \times$$

$$\times \mid\mid G_{n,kl}(\omega_1,\omega_2) - G_{n-1,kl}(\omega_1,\omega_2) \mid\mid =$$

$$=\mid \beta_n \mid\mid\mid g_{n,kl}(t_1,t_2) - g_{n-1,kl}(t_1,t_2) \mid\mid +$$

$$+ \mid 1-\beta_n \mid\mid\mid g_{n,kl}(t_1,t_2) - g_{n-1,kl}(t_1,t_2) \mid\mid \leq$$

$$\leq \mid\mid g_{n,kl}(t_1,t_2) - g_{n-1,kl}(t_1,t_2) \mid\mid .$$

Из этого неравенства и теоремы 1.3.1 (разд. 1.3) следует сходимость итерационного процесса (3.4.9) к функции $g^*_{kl}(t_1,t_2)$.

Равенство

$$g(t_1,t_2) = g^*(t_1,t_2) = \sum_{k=0}^{N_1}\sum_{l=0}^{N_2} g^*_{kl}(t_1,t_2)$$

очевидно.

Доказательство теоремы 3.4.3.

Доказательство сходимости итерационного процесса (3.4.10) проводится так же, как доказательство сходимости итераций (3.4.9), используя теорему Банаха 1.3.1 (разд. 1.3). Завершается доказательство теоремы применением известной в теории интеграла Фурье формулой

$$\mid\mid F(\omega_1,\omega_2) \mid\mid_{L_2} = \mid\mid f(t_1,t_2) \mid\mid_{L_2},$$

связывающей в пространстве $L_2\left(-\infty,\infty)^2\right)$ норму функции $f(t_1,t_2)$ с нормой ее преобразования Фурье $F(\omega_1,\omega_2)$.

Предложенный метод может быть использован при стендовой идентификации различных динамических объектов, включаемых в системы управления, а также при поверке измерительных цепей.

Пример 3.4.1. Дан нелинейный фильтр, описываемый уравнением

$$\int_0^\infty g(t-\tau)x(\tau)d\tau + a_2(\int_0^\infty g(t-\tau)x(\tau)d\tau)^2 = f(t), \text{ где } a_2 = 4,$$

и импульсная переходная функция имеет вид

$$g(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t, & 0 \le t \le 1, \\ \frac{1}{2}(2-t), & 1 < t \le 2, \\ 0, & t > 0. \end{cases}$$

Требуется по реакции на два входных сигнала $x(t)$ и $x_1(t) = x(t)/2$ определить коэффициент a_2 и функцию $g(t)$.

Решение. При подаче на вход сигнала

$$x(t) = \begin{cases} e^{-t}, & t \ge 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$

выходной сигнал имеет вид

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t \le 0, \\ e^{-2t} + 2te^{-t} - \frac{3}{2}e^{-t} + t^2 - \frac{3}{2}t + \frac{1}{2}, & 0 \le t \le 1, \\ e^{-t}\left(\frac{9}{2} - 6t - \frac{36}{e} + \frac{12}{e}\right) + 9e^{-2t} + \\ + \left(\frac{15}{e} - \frac{3}{2} - \frac{24}{e^2}\right)t + \left(1 - \frac{4}{e} + \frac{4}{e^2}\right)t^2 - & 1 < t \le 2, \\ -\frac{9}{e} + \frac{36}{e^2} + \frac{1}{2}, \\ \left(1 - \frac{4}{e} + \frac{6}{e^2} - \frac{4}{e^3} + \frac{1}{e^4}\right)t^2 + \\ + \left(\frac{15}{e} - \frac{71}{2e^2} + \frac{32}{e^3} - \frac{10}{e^4} - \frac{3}{2}\right)t + & 2 < t \le \infty. \\ + \frac{1}{2} - \frac{9}{e} + \frac{87}{2e^2} - \frac{60}{e^3} + \frac{25}{e^4} \end{cases}$$

При подаче на вход сигнала $x_1(t) = x(t)/2$ выходной сигнал равен

$$f_1(t) = \begin{cases} 0, & t \le 0, \\ \frac{1}{4}\left(e^{-2t} - e^{-t} - t + 2te^{-t} + t^2\right), & 0 \le t \le 1, \\ \frac{1}{4}e^{-t}\left(3 + 9e^{-t} - 6t - \frac{36}{e} + \frac{12t}{e}\right) - \frac{t^2}{e^2}(e+1) + \\ \quad + \frac{3}{e^2}(3-2t) - \frac{t}{4}\left(1 - \frac{14}{e}\right) + & 1 < t \le 2, \\ \quad + \frac{1}{4e}\left(t^2 e - 6\right), \\ -\frac{1}{2e}\left(3 - 7t + 2t^2\right) + \frac{1}{4e^2}\left(41 - 35t + 6t^2\right) - \\ -\frac{1}{e^3}\left(15 - 8t + t^2\right) + \frac{1}{4e^4}\left(25 - 10t + t^2\right) - & 2 < t \le \infty. \\ \quad - \frac{t}{4}(1-t), \end{cases}$$

Введя обозначения

$$\begin{aligned} z_1(t) &= \int_0^\infty g(t-\tau)x(\tau)d\tau, \\ z_2(t) &= a_2\left(\int_0^\infty g(t-\tau)x(\tau)d\tau\right)^2, \end{aligned} \qquad (3.4.11)$$

приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} z_1(t) + z_2(t) = f(t), \\ 2^{-1}z_1(t) + 4^{-1}z_2(t) = f_1(t), \end{cases}$$

отсюда

$$z_1 = 4f_1 - f, z_2 = 2f - 4f_1,$$

тогда $a_2 = \dfrac{z_2}{z_1^2} = 4,$

$$z_1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \dfrac{1}{2}(t-1) + \dfrac{1}{2}e^{-t}, & 0 \le t \le 1, \\ \dfrac{1}{2}(t-1) + \dfrac{1}{e}(3-t) - \dfrac{3}{2}e^{-t}, & 1 < t \le 2, \\ \dfrac{1}{2}(t-1) + \dfrac{1}{e}(3-t) - \dfrac{1}{2e}(5-t), & t > 2. \end{cases}$$

Используя обозначения (3.4.11), функцию $g(t)$ найдем из решения уравнения

$$z_1(t) = \int_0^\infty g(t-\tau)e^{-\tau}d\tau.$$

Решением данного уравнения будет функция

$$g(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t, & 0 \le t \le 1, \\ \frac{1}{2}(2-t), & 1 < t \le 2, \\ 0, & t > 0. \end{cases}$$

В результате получаем, что искомые коэффициент a_2 и функция $g(t)$ совпадают с точными.

3.5. Приближенные методы идентификации нелинейных измерительных преобразователей

В данном разделе исследуются нелинейные измерительные преобразователи. Предложены методы идентификации систем с нелинейностями на входе и на выходе. Исследованы методы применения δ-функций к восстановлению динамических характеристик нелинейных измерительных преобразователей. Предлагается метод идентификации нелинейных систем по реакции на несколько специально подобранных сигналов.

3.5.1. Идентификация параметров нелинейных измерительных преобразователей по реакции на δ-образный входной сигнал

Предлагаются методы идентификации нелинейных измерительных преобразователей с сосредоточенными параметрами, описываемых уравнениями

$$\sum_{k=1}^{N} a_k \left(\int_0^t g(t-\tau)x(\tau)d\tau \right)^k = f(t),\ 0 \le t \le T, \qquad (3.5.1)$$

по реакции на δ-функцию. Здесь $g(t)$ – импульсная переходная функция инерционного звена, удовлетворяющая условияю: $g(t) = 0$ при $t \le 0$; $x(t)$ и $f(t)$ соответственно входной и выходной сигналы измерительного преобразоватея. Будем считать функцию $g(t)$ непрерывной. Дополнительные условия, налагаемые на $g(t)$, будут сформулированы в соответствующих местах.

Не ограничивая общности, можно считать, что $a_1 = 1$. Будем также считать, что порядок нелинейности N левой части уравнения (3.5.1) известен.

Рассмотрены следующие методы идентификации:

1) метод восстановления импульсной переходной функции $g(t)$ и коэффициентов a_k, $k = 1, 2, \ldots, N$, основанный на обработке откликов измерительного преобразователя (3.5.1) на конечную последовательность входных δ-функций;

2) метод восстановления функции $g(t)$ на сегменте $[0, T]$, если известны ее значения на сегменте $[a, b] \subset [0, T]$;

3) метод вычисления коэффициентов $a_k, k = 1, 2, \ldots, N$, и восстановления монотонной импульсной переходной функции по значениям $f(t)$ на конечной сетке узлов.

3.5.2. Идентификация параметров измерительных преобразователей по реакции на последовательность δ-образных функций

Исследуется возможность восстановления параметров измерительного преобразователя (3.5.1) подачей на вход конечной последовательности δ-функций.

Подадим на вход преобразователя (3.5.1) последовательность[1]:

$$\delta_k(t) = \frac{1}{2^k}\delta(t), k = 0, 1, 2, \ldots, N-1,$$

где δ-функция имеет вид

$$\delta(t_0 - t) = \begin{cases} \infty & \text{при } t = t_0, \\ 0 & \text{при } t \neq t_0, \end{cases} \text{ и } \int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau)d\tau = 1.$$

Замечание 3.5.1. *Так как существует бесконечно большое число $\delta(t)$-образных функций и при решении каждой прикладной задачи необходимо выбирать наиболее "подходящую", то дальнейшее изложение формально ведется для $\delta(t)$-функции.*

Известно, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-\tau)d\tau = f(t).$$

В результате получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} g(t) + a_2 g^2(t) + \cdots + a_N g^N(t) = f_1(t), \\ \frac{1}{2}g(t) + \frac{1}{2^2}a_2 g^2(t) + \cdots + \frac{1}{2^N}a_N g^N(t) = f_2(t), \\ \cdots \\ \frac{1}{2^{N-1}}g(t) + \frac{1}{2^N}a_2 g^2(t) + \cdots + \frac{1}{2^{N(N-1)}}a_N g^N(t) = f_N(t). \end{cases} \tag{3.5.2}$$

Введем новые неизвестные функции:

$$x_1(t) = g(t), x_k(t) = a_k g^k(t), k = 2, 3, \ldots, N.$$

Тогда систему (3.5.2) можно записать в виде

$$\begin{cases} x_1(t) + x_2(t) + \cdots + x_N(t) = f_1(t), \\ \frac{1}{2}x_1(t) + \frac{1}{2^2}x_2(t) + \cdots + \frac{1}{2^N}x_N(t) = f_2(t), \\ \cdots \\ \frac{1}{2^{N-1}}x_1(t) + \frac{1}{2^N}x_2(t) + \cdots + \frac{1}{2^{N(N-1)}}x_N(t) = f_N(t). \end{cases} \tag{3.5.3}$$

[1]Реализация непосредственно функций $\frac{1}{2^k}\delta(t)$ невозможна и на практике используются последовательности $\frac{1}{2^k}\tilde{\delta}(t)$, где $\tilde{\delta}(t)$ – – δ-образная функция.

Определитель матрицы этой системы (где $x_k(t)$ – неизвестные) равен [137, пример 343]:

$$\Delta = (-1)^{N-1} \prod_{i=1}^{N} \frac{1}{2^i} \prod_{N \geq l > k \geq 1} \left(\frac{1}{2^l} - \frac{1}{2^k} \right) \left[\sum_{i=1}^{N} 2^i \varphi' \left(\frac{1}{2^i} \right) \right],$$

где $\varphi(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_N), x_k = \left(\frac{1}{2}\right)^k, k = 1, 2, \dots, N$, и, следовательно, $\Delta \neq 0$.

Из теоремы Крамера следует, что система линейных алгебраических уравнений (3.5.3) однозначно разрешима. Определив из нее $x_k(t), k = 1, 2, \dots, N$, последовательно восстанавливаем функцию $g(t)$ и коэффициенты $a_k, k = 2, 3, \dots, N$.

При практической реализации описанного метода вместо функций $\delta_k(t)$ необходимо воспользоваться δ-образными функциями. Следуя [113], используем аналитическую аппроксимацию δ-функции в виде $\tilde{\delta}(\tau) = \tilde{\delta}(r, \tau) = \frac{r}{\sqrt{\pi} e^{r^2 \tau^2}}$. Тогда $\delta(t) = \lim\limits_{r \to \infty} \tilde{\delta}(r, t)$.

В линейном случае, погрешность, обусловленная заменой последовательности $\delta(t)$- функции на последовательность $\tilde{\delta}_k(t)$, может быть оценена методом, использованном в [113].

Пример 3.5.1. Рассмотрим измерительный преобразователь (3.5.1), где $N = 5$, $T = 10$ и

$$g(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq 5, \\ 10 - t, & 5 < t \leq 10, \\ 0, & t \geq 10. \end{cases}$$

Требуется определить функцию $g(t)$ и значения коэффициентов a_k, $k = 1, 2, ..., 5$.

Решение. В качестве входных сигналов возьмем последовательность $\tilde{\delta}_k(t) = \frac{1}{2^k} \tilde{\delta}(t)$, где $\tilde{\delta}(t)$ – дельта-образная последовательность, определяется формулой $\tilde{\delta}(t) = \tilde{\delta}(r, \tau) = \frac{r}{\sqrt{\pi}} e^{-r^2 \tau^2}$, где $r = 10$.

Результаты восстановления коэффициентов a_k, $k = 1, \dots, 5$ приведены в табл. 3.1, а функции $g(t)$ – в табл. 3.2.

Приведенные результаты показывают эффективность применения данного метода. При замене δ-функций δ-образными возникает погрешность, зависящая от выбора δ-образных функций.

Таблица 3.1. Результаты восстановления коэффициентов a_k

Коэффициенты	Точные значения a_k	Приближенные значения	Погрешность восстановления
a_1	1.00	1.000000	0.000000
a_2	2.00	2.001380	0.001380
a_3	3.00	3.009844	0.009844
a_4	4.00	4.001829	0.001829
a_5	5.00	4.992879	0.007100

Таблица 3.2. Результаты восстановления функции $g(t)$

Узлы t_k	Точные значения	Приближенные значения	Погрешность восстановления
0.00	0.00	0.00012	0.00012
1.00	1.00	1.00230	0.00230
2.00	2.00	2.97800	0.97800
3.00	3.00	3.00305	0.00305
4.00	4.00	4.00096	0.00096
5.00	5.00	5.00001	0.00001
6.00	4.00	4.00005	0.00005
7.00	3.00	2.99008	0.99008
8.00	2.00	2.00034	0.00034
9.00	1.00	0.99970	0.00003

3.5.3. Восстановление функции $g(t)$ на сегменте $[0, T]$

Рассмотрим измерительный преобразователь (3.5.1). Пусть импульсная переходная функция $g(t)$ отлична от нуля на сегменте $[0, T]$, но ее значения известны только на сегменте $[a, b] \subset [0, T]$. Требуется восстановить значения функции $g(t)$ на всем сегменте $[0, T]$ и вычислить коэффициенты $a_k, k = 2, 3, \ldots, N$.

На примере использования интерполяции по узлам полинома Чебышева первого рода изложим алгоритм восстановления функции $g(t)$ с сегмента $[a, b]$ на сегмент $[0, T]$($[a, b]\subset[0, T]$) путем последовательного приближения функции $g(t)$ на сегментах $[-\tilde{v}_0, \tilde{v}_0], \ldots,$ $[-\tilde{v}_m, \tilde{v}_m]$ таких, что $[-\tilde{v}_i, \tilde{v}_i]\subset[-\tilde{v}_{i+1}, \tilde{v}_{i+1}], i=0, \ldots, m-1$, причем сегмент $[-\tilde{v}_0, \tilde{v}_0]$ совпадает с $[a, b]$, а сегмент $[-\tilde{v}_m, \tilde{v}_m]$ совпадает с $[0, T]$. Отметим, что вместо узлов полинома Чебышева могут быть взяты узлы других полиномов, а также равностоящие узлы.

Для простоты обозначений перенесем начало координат в середину сегмента $[a, b]$ и будем считать, что функция $g(t)$ принадлежит классу $W^r(A)$ на сегменте $[-D, D]$ и известна своими значениями на сегменте $[-d, d]$ ($[-d, d] \subset [-D, D]$).

Требуется восстановить функцию $g(t)$ на всем сегменте $[-D, D]$.

Обозначим через $z_k, k = 1, \ldots, n$, узлы полинома Чебышева первого рода степени n, расположенные на сегменте $[-1, 1]$. Возьмем за начальный сегмент $[-v_0, v_0] = [-d, d]$. Отобразим сегмент $[-1, 1]$ на числовую ось таким образом, чтобы узлы z_1 и z_n отобразились в точки $-v_0$ и v_0 соответственно. Тогда сегмент $[-1, 1]$ отобразится на сегмент $[-\tilde{v}_0, \tilde{v}_0]$. При этом узлы $z_1 \ldots, z_n$ $(z_1, \ldots, z_n \in [-1, 1])$ отображаются в узлы $z_1^0, \ldots, z_n^0$, $(z_1^0, \ldots, z_n^0 \in [-v_0, v_0])$.

Обозначим через $P_n^0(g, t)$ интерполяционный полином, построенный по узлам $z_1^0, \ldots, z_n^0$. По формуле

$$\tilde{g}_0(t) = \begin{cases} g(t), & t \in [-v_0, v_0], \\ P_n^0(g, t), & t \in [-\tilde{v}_0, \tilde{v}_0] \setminus [-v_0, v_0], \end{cases}$$

восстановим функцию $g(t)$ на сегменте $[-\tilde{v}_0, \tilde{v}_0]$. Аналогичные построения будем проводить до тех пор, пока не будет восстановлена функция $g(t)$ на всем сегменте $[-D, D]$.

Обозначим через m число шагов, которое требуется для восстановления функции $g(t)$ на всем сегменте $[-D, D]$. Из дальнейшего будет видно, как определить это число. Опишем построение интерполяционного полинома $P_n^j(g, t), j = 1, 2, \ldots, m-1$. Оно подобно построению полинома $P_n^0(g, t)$. Пусть функция $g(t)$ уже восстановлена на сегменте $[-v_j, v_j]$. Отобразим сегмент $[-1, 1]$ на сегмент $[-v_j, v_j]$ таким образом, чтобы точки z_1 и z_n отобразились в концы сегмента $[-v_j, v_j]$ соответственно. Обозначим через $z_1^j, z_2^j \ldots, z_n^j$ образы точек $z_1, z_2 \ldots, z_n$. При этом отображении точки -1 и 1 отобразятся в $-\tilde{v}_j$ и $\tilde{v}_j$ соответственно. Через $P_n^j(g, t)$ обозначим интерполяционный полином, построенный по узлам $z_1^j, \ldots, z_n^j$ и значениям функции $g_{j-1}(t)$ в этих узлах. Восстановление функции $g(t)$ на сегменте $[-\tilde{v}_j, \tilde{v}_j]$ проводится по формуле

$$\tilde{g}_j(t) = \begin{cases} \tilde{g}_{j-1}(t), & t \in [-v_j, v_j], \\ P_n^j(g, t), & t \in [-\tilde{v}_j, \tilde{v}_j] \setminus [-v_j, v_j]. \end{cases}$$

Далее полагаем $[-v_{j+1}, v_{j+1}] = [-\tilde{v}_j, \tilde{v}_j]$ и продолжаем построения. При этом погрешность, которая возникает на первом шаге, оценивается неравенством

$$\max_{t \in [-\tilde{v}_0, \tilde{v}_0]} |g(t) - \tilde{g}(t)| \leq E_{n-1}(g)\lambda_n,$$

где λ_n – константа Лебега интерполяции на сегменте $[-1, 1]$ по узлам полинома Чебышева первого рода степени n. Здесь $E_{n-1}(g)$ – наилучшее приближение функции $g(t)$ на сегменте $[-D, D]$ полиномами $(n-1)$ степени.

При восстановлении функции $g(t)$ на сегменте $[-\tilde{v}_1, \tilde{v}_1]$ функция $\tilde{g}_0(t)$ интерполируется на сегменте $[-v_1, v_1]$. В этом случае оценка погрешности оценивается следующим образом:

$$\max_{t\in[-\tilde{v}_1,\tilde{v}_1]} |g(t) - \tilde{g}_1(t)| =$$

$$= \max_{t\in[-\tilde{v}_1,\tilde{v}_1]} |g(t) - T_{n-1}(t) + P_n[T_{n-1}(t) - \tilde{g}_0(t)]| \leq$$

$$\leq \max_{t\in[-\tilde{v}_1,\tilde{v}_1]} |g(t) - T_{n-1}(t)| + \max_{t\in[-\tilde{v}_1,\tilde{v}_1]} |P_n[T_{n-1}(t) - \tilde{g}_0(t)]| \leq E_{n-1}(g) +$$

$$+ \max_{t\in[-\tilde{v}_0,\tilde{v}_0]} |T_{n-1}(t) - \tilde{g}_0(t)|\lambda_n \leq E_{n-1}(g) + E_{n-1}(g)\lambda_n) \leq$$

$$\leq E_{n-1}(g)(1 + \lambda_n + \lambda_n^2).$$

Продолжая этот процесс, имеем

$$\max_{t\in[-D,D]} |g(t) - \tilde{g}_m(t)| \leq E_{n-1}(g)(1 + \lambda_n + \cdots + \lambda_n^{m-1}). \qquad (3.5.4)$$

Таким образом, построен алгоритм экстраполяции функции $g(t)$ с сегмента $[-d, d]$ на сегмент $[-D, D]$ за m шагов с точностью (3.5.4).

Из неравенства $E_{n-1}(g)(1 + \lambda_n + \cdots + \lambda_n^{m-1}) \leq \varepsilon$ легко определить по данным значениям A, d, r, ε максимальную длину сегмента $[-D, D]$, для которого возможно восстановление с точностью ε функции $g(t) \in W^r(A)$ с сегмента $[-d, d]$.

Пример 3.5.2. Требуется восстановить ИПФ $g(t) = 5-(t-5)^2|t-5|$ с сегмента $[2.5, 7.5]$ на сегмент $[0, 10]$.

Решение. В табл. 3.3 приведены результаты, показывающие эффективность данного метода. Из табл. 3.3 видно, что точность зависит от точности задания исходных данных (в третьем столбце предполагается, что значения функции $g(t)$ известны точно, в четвертом – погрешностью $\varepsilon = 0,0001$).

Если предполагается, что импульсная переходная функция финитна и непрерывна на заданном отрезке времени, то задача экстраполяции по данному алгоритму для задач идентификации наиболее приемлема, в отличие от стандартной задачи экстраполяции.

Таблица 3.3. Результаты восстановления $g(t)$

Узлы t_k.0000	Точные значения.0000	Полученные значения при ε=0	Полученные значения при ε=0.0001
0.0000	0.0000	-0.0291763	-0.0399834
1.0000	61.0000	60.914846	60.879522
2.0000	98.0000	97.991006	97.985883
3.0000	117.0000	117.00018	117.000712
4.0000	124.0000	124.002095	124.001529
5.0000	125.0000	125.022526	125.022693
6.0000	124.0000	124.002413	124.002107
7.0000	117.0000	117.001562	117.000958
8.0000	98.0000	98.045261	98.134423
9.0000	61.0000	61.07005	61.426374
10.0000	0.0000	0.12468	0.2700685

3.5.4. Восстановление коэффициентов a_k аппаратной функции $\sum_{k=1}^{N} a_k g(t)$

Из свойств δ-функции следует, что при подаче на вход динамической системы, описываемой уравнением (3.5.1), соответствующий выходной сигнал равен

$$f(t) = \sum_{k=1}^{N} a_k g^k(t). \tag{3.5.5}$$

В предположении, что известны значения импульсной переходной функции $g(t)$ на сегменте $[a, b]$ и известно, что функция $g(t)$ монотонно возрастает или убывает на этом сегменте, вычислим коэффициенты $a_k, k = 1, 2, \ldots, N$.

Выберем N точек $t_k \in [a, b], k = 1, 2, \ldots, N$, и приравняем правые и левые части уравнения (3.5.5) в точках $t_k, k = 1, 2, \ldots, N$.

Отметим, что заранее узлы t_k, в которых проводились измерения, неизвестны, однако это не влияет на результат решения.

В результате получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{N} a_k g^k(t_1) &= f(t_1), \\ \sum\limits_{k=1}^{N} a_k g^k(t_2) &= f(t_2), \\ & \ldots \\ \sum\limits_{k=1}^{N} a_k g^k(t_N) &= f(t_N) \end{cases}$$

или в векторной форме:

$$Ku = f, \tag{3.5.6}$$

где

$$K = \begin{pmatrix} g(t_1) & g^2(t_1) & \dots & g^N(t_1) \\ . & . & \dots & . \\ g(t_N) & g^2(t_N) & \dots & g^N(t_N) \end{pmatrix},$$

$$u = \begin{pmatrix} a_1 \\ . \\ a_N \end{pmatrix}, \; f = \begin{pmatrix} f(t_1) \\ . \\ f(t_N) \end{pmatrix}.$$

Известно [137], что определитель матрицы K равен

$$\prod_{i=1} g(t_i) \prod_{i>j}^{N} (g(t_i) - g(t_j)).$$

Так как на сегменте $[a, b]$, на котором расположены узлы t_k, функция $g(t)$ строго возрастает или убывает, то определитель отличен от нуля.

Следовательно, система (3.5.6) однозначно разрешима.

Отметим, что при наложенном на функцию $g(t)$ условии монотонности на сегменте $[a, b]$ система (3.5.6) однозначно разрешима при любых N узлах. В качестве узлов t_k можно взять равностоящие на $[a, b]$ узлы. Так как из физических соображений ясно, что при любых значениях $t_k, k = 1, 2, \dots, N$, система уравнений (3.5.6) имеет одно и только одно единственное решение, то, решая систему уравнений (3.5.6) при произвольных наборах различных узлов, мы получаем решения, которые отличаются от искомого вычислительной погрешностью и погрешностью измерений. Для уменьшения погрешности можно взять несколько систем уравнений, а затем усреднить по числу систем полученные значения коэффициентов.

Найдя значения $a_k, k = 1, 2, \dots, N$, из этой системы, значения $g(t)$ на всем сегменте $[0, T]$ находим, решая нелинейное уравнение (3.5.5) относительно неизвестной функции $g(t)$. Здесь могут быть использованы стандартные методы вычислительной математики [8]. Один из алгоритмов решения уравнения (3.5.5) описан в [18].

Замечание 3.5.2. *Требование монотонности функции $g(t)$ на сегменте $[a, b]$ введено для простоты. На самом деле достаточным условием является, чтобы измерения проводились в точках t_k таких, что $g(t_i) \neq g(t_j)$ при $i \neq j$.*

Пример 3.5.3. Рассмотрим нелинейный измерительный преобразователь, описываемый уравнением (3.5.1), где

$$g(t) = \begin{cases} t, & t \in [0,5], \\ 10 - t, & t \in (5,10], \\ 0, & t \in (-\infty, \infty) \setminus [0,10], \end{cases}$$

$a_1 = 1,0$; $a_2 = 2,0$; $a_3 = 3,0$; $a_4 = 4,0$; $a_5 = 5,0$.

Требуется, располагая информацией о значениях функции $g(t)$ на сегменте $[0,1]$ и реакцией преобразователя на δ-функцию, вычислить коэффициенты a_k, $k = 1,2,\ldots,5$ и восстановить функцию $g(t)$ на сегменте $[0,10]$.

Решение. Результаты восстановления функции $g(t)$ и коэффициентов a_k, $k = 1,2,\ldots,5$ приведены в табл. 3.4–3.7.

Таблица 3.4. Результаты восстановления коэффициентов a_k

Точные значения a_k	Полученные при ε=0	Полученные при ε=0.0000001	Полученные при ε=0.000001	Полученные при ε=0.00001
1.00	1.00	1.00000	1.000000	1.000000
2.00	2.00	2.000050	1.998246	1.996826
3.00	3.00	2.999844	3.005698	3.010646
4.00	4.00	4.000209	3.992622	3.984537
5.00	5.00	4.999899	5.003256	5.007504

Таблица 3.5. Результаты восстановления коэффициентов a_k

Точные значения, a_k	Полученные при ε=0	Полученные при ε=0.00000001	Полученные при ε=0.0000001	Полученные при ε=0.000001
1.00	1.00	1.00000	1.000000	1.000000
2.00	2.00	2.001485	2.009485	1.940565
3.00	3.00	2.998685	2.990713	3.054133
4.00	4.00	4.000545	4.007988	3.925779
5.00	5.00	4.999916	4.991366	5.013963

В табл. 3.4 коэффициенты a_k получены решением системы (3.5.6) по методу Гаусса, а в табл. 3.5 – по итерационной схеме (1.3.5), предлагаемой в первой главе, при $\alpha = 0,0001$ и числе итераций, равном 500. В табл. 3.6 и 3.7 приведены результаты восстановления функции $g(t)$ в результате решения нелинейного уравнения (3.5.5) для каждого значения t и соответствующих значениям коэффициентов a_k (табл. 3.4, 3.5).

Таблица 3.6. Результаты восстановления функции $g(t)$

Узлы t_k	Точные значения	Полученные при ε=0	Полученные при ε=0.0000001	Полученные при ε=0.000001	Полученные при ε=0.00001
0.00	0.00	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1.00	1.00	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
2.00	2.00	2.0000	2.0000	2.0000	2.0000
3.00	3.00	3.0000	3.0000	3.0000	3.0000
4.00	4.00	4.0000	4.0000	4.0000	4.0000
5.00	5.00	5.0000	5.0000	5.0000	5.0000
6.00	4.00	4.0000	4.0000	4.0000	4.0000
7.00	3.00	3.0000	3.0000	3.0000	3.0000
8.00	2.00	2.0000	2.0000	2.0000	2.0000
9.00	1.00	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Таблица 3.7. Результаты восстановления функции $g(t)$

Узлы t_k	Точные значения	Полученные при ε=0	Полученные при ε=0.0000001	Полученные при ε=0.000001	Полученные при ε=0.00001
0.00	0.00	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
1.00	1.00	1.00001	1.00001	1.00010	1.00010
2.00	2.00	2.00000	2.00001	2.00010	2.00010
3.00	3.00	3.00000	3.00001	3.00001	3.00010
4.00	4.00	4.00000	4.00000	4.00000	4.00010
5.00	5.00	5.00000	5.00000	5.00000	5.00000
6.00	4.00	4.00000	4.00000	4.00000	4.00010
7.00	3.00	3.00000	3.00001	3.00000	3.00007
8.00	2.00	2.00000	2.00001	2.00009	2.00009
9.00	1.00	1.00001	1.00000	1.00008	1.00001

3.5.5. Применение δ-функции для идентификации нелинейных систем с распределенными параметрами

Рассмотрим нелинейный измерительный преобразователь, функционирование которого описывается уравнением

$$\sum_{k=1}^{N} a_k \left(\int_0^t g(t,\tau)x(\tau)d\tau \right)^k = f(t),\ 0 \le t \le T, \qquad (3.5.7)$$

где $a_1 = 1, g(t,\tau)$ – динамическая характеристика (импульсная переходная функция) линейной части системы, $x(t)$ и $f(t)$ – соответственно входной и выходной сигналы. Предположение, что $a_1 = 1$ не влияет на общность рассуждений, так как можно в качестве динамической характеристики линейной части взять функцию $a_1 g(t,\tau)$.

Требуется определить функцию $g(t,\tau)$, $0 \le \tau \le t \le T$, и значения коэффициентов $a_k, k = 1, \ldots, N$.

Пусть выполняется условие A:

а) значения импульсной переходной функции $g(t,\tau)$ известны при $\tau{=}\tau_0$ и $t{\in}[a,b]([a,b]{\subset}[0,T])$;

б) импульсная переходная функция $g(t,\tau_0)$ монотонно возрастает или убывает при $t{\in}[a,b]$.

Подавая на вход преобразователя (3.5.7) δ-функцию и используя свойство δ-функции

$$\int_0^t g(t,\tau)\delta(\tau_0-\tau)d\tau = g(t,\tau_0), 0 \le t \le T,$$

получим

$$\sum_{k=1}^{N} a_k g^k(t,\tau_0) = f_0(t), 0 \le t \le T,$$

где $f_0(t)$ – выходной сигнал измерительного преобразователя (3.5.7) по реакции на δ-функцию в момент времени $\tau = \tau_0$.

Так как известны значения функции $g(t,\tau_0)$ при $t \in [a,b]$, то, взяв N значений $t_k = a + \dfrac{(b-a)k}{N}, k = 1, \ldots, N$, получим систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных значений $a_k, k = 1, \ldots, N$,

$$\sum_{k=1}^{N} a_k g^k(t_l,\tau_0) = f_0(t_l), l = 1, \ldots, N. \qquad (3.5.8)$$

Учитывая условие монотонности функции $g(t,\tau_0)$ и результаты, полученные для систем с сосредоточенными параметрами, приходим к заключению, что система линейных уравнений (3.5.8) однозначно разрешима.

Далее, зная значения коэффициентов $a_k, k = 1, \ldots, N$, и подавая на вход измерительного преобразователя (3.5.7) последовательно серию δ-функций в моменты времени $\tau = \tau_k, k = 1, \ldots, M$, можем восстановить значения $g(t,\tau_k), k = 1, \ldots, M$, для каждого t из решения системы нелинейных уравнений

$$\sum_{k=1}^{N} a_k g^k(t,\tau_k) = f_k(t), k = 1, \ldots, M,$$

относительно неизвестной функции $g(t,\tau_k)$.

Отметим, что после того, как восстановлены коэффициенты a_k, $k = 1, \ldots, N$, то выполнение условия A достаточно для восстановления всех значений функции $g(t, \tau)$.

Замечание 3.5.3. *Замена δ-функции реальной δ-образной функцией вносит дополнительную погрешность в приведенные выше рассуждения. Анализ этой погрешности опускается.*

3.5.6. Идентификация нелинейных систем с распределенными параметрами по нескольким тестовым сигналам

Предлагается метод идентификации нелинейного измерительного преобразователя, функционирование которого описывается уравнением

$$\sum_{k=1}^{N} a_k \int_0^t g(t, \tau) x^k(\tau) d\tau = f(t), 0 \le t \le T, \tag{3.5.9}$$

где $a_1 = 1, g(t, \tau)$ – динамическая характеристика (импульсная переходная функция) линейной части системы, $x(t)$ и $f(t)$ – соответственно входной и выходной сигналы. Предположение $a_1 = 1$ не влияет на общность рассуждений, так как можно в качестве динамической характеристики линейной части взять функцию $a_1 g(t, \tau)$.

Требуется, располагая откликом системы на несколько специально подобранных сигналов, определить функцию $g(t, \tau)$ и коэффициенты $a_k, k = 1, \ldots, N$.

Приближенное представление функции $g(t, \tau)$ будем искать в виде

$$g_n(t, \tau) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n} \alpha_{kl} t^k \tau^l \tag{3.5.10}$$

с неизвестными коэффициентами α_{kl}.

Для определения коэффициентов $\{\alpha_{kl}\}$, $k, l = 0, 1, \ldots, n$, подадим на вход устройства $(n + 1)$ сигнал следующего вида:

$$x_m(t) = \begin{cases} t^m, & t \in [0, T], m = 2n + 1, \ldots, 3n + 1, \\ 0, & t \in (-\infty, +\infty) \setminus [0, T]. \end{cases} \tag{3.5.11}$$

Предположим, что функция $g(t, \tau)$ и входной сигнал $x(t)$ в уравнении (3.5.9) задаются точно.

Решение поставленной задачи разобьем на два этапа:

– первый – определение коэффициентов разложения (3.5.10);

– второй – определение коэффициентов a_k (3.5.9).

При исследовании методов восстановления коэффициентов разложения (3.5.10) функции $g(t,\tau)$ рассмотрим следующие три случая:

1) функция $g(t,\tau)$ есть полином известной степени n (степени по t и τ будем предполагать равными);

2) функция $g(t,\tau)$ есть полином, степень которого неизвестна;

3) $g(t,\tau)$ – непрерывная функция в области $[0,T]^2$.

Рассмотрим каждый из этих случаев в отдельности.

Случай 1. Подставляя (3.5.10) и (3.5.11) в (3.5.9), после интегрирования и алгебраических преобразований получим

$$f_m(t) = a_1 \left[\frac{\alpha_{0,0}}{m+1} t^{m+1} + \left(\frac{\alpha_{1,0}}{m+1} + \frac{\alpha_{0,1}}{m+2} \right) t^{m+2} +$$

$$\dots$$

$$+ \left(\frac{\alpha_{n,0}}{m+1} + \frac{\alpha_{n-1,1}}{m+2} + \dots + \frac{\alpha_{0,n}}{m+n+1} \right) t^{m+n+1} +$$

$$\dots$$

$$+ \left(\frac{\alpha_{n,n-1}}{m+n} + \frac{\alpha_{n-1,n}}{m+n+1} \right) t^{m+2n} + \frac{\alpha_{n,n}}{m+n+1} t^{m+2n+1} \Bigg] +$$

$$+ a_2 \left[\frac{\alpha_{0,0}}{2m+1} t^{2m+1} + \left(\frac{\alpha_{1,0}}{2m+1} + \frac{\alpha_{0,1}}{2m+2} \right) t^{2m+2} +$$

$$\dots$$

$$+ \left(\frac{\alpha_{n,0}}{2m+1} + \frac{\alpha_{n-1,1}}{2m+2} + \dots + \frac{\alpha_{0,n}}{2m+n+1} \right) t^{2m+n+1} +$$

$$+ \left(\frac{\alpha_{n,1}}{2m+2} + \frac{\alpha_{n-1,2}}{2m+3} + \dots + \frac{\alpha_{1,n}}{2m+n+2} \right) t^{2m+n+1} +$$

$$\cdots$$

$$+\left(\frac{\alpha_{n,n-1}}{2m+n}+\frac{\alpha_{n-1,n}}{2m+n+1}\right)t^{2m+2n}+\frac{\alpha_{n,n}}{2m+n+1}t^{2m+2n+1}\Bigg]+$$

$$\cdots$$

$$+a_N\left[\frac{\alpha_{0,0}}{Nm+1}t^{Nm+1}+\left(\frac{\alpha_{1,0}}{Nm+1}+\frac{\alpha_{0,1}}{Nm+2}\right)t^{Nm+2}+\right.$$

$$\cdots$$

$$+\left(\frac{\alpha_{n,0}}{Nm+1}+\frac{\alpha_{n-1,1}}{Nm+2}+\cdots+\frac{\alpha_{0,n}}{Nm+n+1}\right)t^{Nm+n+1}+$$

$$+\left(\frac{\alpha_{n,1}}{Nm+2}+\frac{\alpha_{n-1,2}}{Nm+3}+\cdots+\frac{\alpha_{1,n}}{Nm+n+1}\right)t^{Nm+n+2}+$$

$$\cdots$$

$$+\left(\frac{\alpha_{n,n-1}}{Nm+n}+\frac{\alpha_{n-1,n}}{Nm+n+1}\right)t^{Nm+2n}+$$

$$\left.+\frac{\alpha_{n,n}}{Nm+n+1}t^{Nm+2n+1}\right],m=2n+1,\cdots,3n+1, \qquad (3.5.12)$$

где $f_m(t)$ – выходной сигнал системы при подаче на вход сигнала $x_m(t)=t^m, m=2n+1,\ldots,3n+1$.

Обозначим выходной сигнал преобразователя (3.5.9) при подаче на его вход функции $x_m(t)$ через $f_m^*(t)$. Далее, разлагая $f_m^*(t)$ в степенной ряд по степеням t до $2n+Nm+1$ ($m=2n+1,\ldots,3n+1$) порядка, имеем

$$f_m^*(t)=\sum_{k=m+1}^{2n+Nm+1}f_k^m t^k. \qquad (3.5.13)$$

Слагаемые со степенями до $(m+1)$ порядка не рассматриваются, так как если они возникают при разложении, то они характеризуют вычислительные и измерительные погрешности.

Приравнивая выражения, стоящие в правых частях равенств (3.5.12), (3.5.13) при одинаковых степенях t, получим для каждого m ($m = 2n+1, \ldots, 3n+1$) системы линейных уравнений следующего вида:

$$\begin{cases} a_1 = 1, \\ a_1 \dfrac{\alpha_{0,0}}{2n+2} = f_{2n+2}^{2n+1}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha_{1,0}}{2n+2} + \dfrac{\alpha_{0,1}}{2n+3} = \dfrac{f_{2n+3}^{2n+1}}{a_1}, \\ \dfrac{\alpha_{1,0}}{2n+3} + \dfrac{\alpha_{0,1}}{2n+4} = \dfrac{f_{2n+4}^{2n+2}}{a_1}; \end{cases}$$

$$\ldots$$

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha_{n,0}}{2n+2} + \dfrac{\alpha_{n-1,1}}{2n+3} + \cdots + \dfrac{\alpha_{0,n}}{3n+2} = \dfrac{f_{3n+2}^{2n+1}}{a_1}, \\ \dfrac{\alpha_{n,0}}{2n+3} + \dfrac{\alpha_{n-1,1}}{2n+4} + \cdots + \dfrac{\alpha_{0,n}}{3n+3} = \dfrac{f_{3n+3}^{2n+2}}{a_1}, \\ \ldots \\ \dfrac{\alpha_{n,0}}{3n+2} + \dfrac{\alpha_{n-1,1}}{3n+3} + \cdots + \dfrac{\alpha_{0,n}}{4n+2} = \dfrac{f_{4n+2}^{3n+1}}{a_1}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha_{n,1}}{2n+3} + \dfrac{\alpha_{n-1,2}}{2n+4} + \cdots + \dfrac{\alpha_{1,n}}{3n+2} = \dfrac{f_{3n+3}^{2n+1}}{a_1}, \\ \dfrac{\alpha_{n,1}}{2n+4} + \dfrac{\alpha_{n-1,2}}{2n+5} + \cdots + \dfrac{\alpha_{1,n}}{3n+3} = \dfrac{f_{3n+4}^{2n+2}}{a_1}, \\ \ldots \\ \dfrac{\alpha_{n,1}}{3n+2} + \dfrac{\alpha_{n-1,2}}{3n+3} + \cdots + \dfrac{\alpha_{1,n}}{4n+1} = \dfrac{f_{4n+2}^{3n}}{a_1}; \end{cases}$$

$$\ldots$$

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha_{n,n-1}}{3n+1} + \dfrac{\alpha_{n-1,n}}{3n+2} = \dfrac{f_{4n+1}^{2n+1}}{a_1}, \\ \\ \dfrac{\alpha_{n,n-1}}{3n+2} + \dfrac{\alpha_{n-1,n}}{3n+3} = \dfrac{f_{4n+2}^{2n+2}}{a_1}; \end{cases}$$

$$\frac{\alpha_{n,n}}{3n+2} = \frac{f_{4n+2}^{2n+1}}{a_1}. \qquad (3.5.14)$$

В системе (3.5.14) фигурными скобками выделены системы, состоящие из двух и т. д. уравнений с одними и теми же неизвестными, из которых и найдем значения $\alpha_{kl}(k, l = 0, \ldots, n)$. В случае необходимости для решения систем линейных уравнений (3.5.14) могут быть использованы численные методы [8].

Случай 2. В этом случае для восстановления функции $g(t, \tau)$ требуется определить степень полинома (3.5.10), а затем воспользоваться предыдущим алгоритмом (как и прежде степени по t и τ предполагаются одинаковыми).

Предположим, что функция $g(t, \tau)$ имеет вид (3.5.10), где n – фиксированное, но заранее неизвестное число. В этом случае величина n может быть определена из следующих соображений.

Так как функция $g(t, \tau)$ – полином, то выходной сигнал также является полиномом. Следовательно, начиная с некоторого номера в разложении выходного сигнала его коэффициенты будут равны нулю.

Таким образом, задача определения степени полинома $g(t, \tau)$ связана (в предположении, что $g(t, \tau)$ – полином степени n по каждой из переменных t и τ) с определением номера K, начиная с которого все коэффициенты разложения функции $f(t)$ в ряд по степеням t равны нулю. При решении практических задач это означает, что нужно по данному ε (ε – точность съема информации) найти такое K, что при $l \geq K$ коэффициенты f_l ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k t^k$ были бы по модулю меньше $\varepsilon, |f_l| < \varepsilon$ при $\forall l \geq K$. Ниже описано несколько методов приближенного определения коэффициентов f_k.

Определив порядок K многочлена, являющегося выходным сигналом, определим степень полинома $g(t, \tau)$ из следующего соотношения: $2n + Nm + 1 = K$. Имеем $n = (K - Nm - 1)/2$, если $(K - Nm - 1)/2$ – целое число, или $n = [(K - Nm - 1)/2] + 1$, если $(K - Nm - 1)/2$ – нецелое.

Получив таким образом n-ю степень полинома и далее воспользовавшись алгоритмом, описанным для первого случая, мы восстанавливаем коэффициенты разложения (3.5.10) функции $g(t,\tau)$.

Случай 3. В этом случае также требуется определить степень n разложения (3.5.10), исходя из точности с которой необходимо определить коэффициенты разложения (3.5.10).

Предположим, что $g(t,\tau)$ – непрерывная функция по переменным t и τ, определенная в прямоугольнике $[0,T;0,T]$. Из теоремы Вейерштрасса [173] следует, что функция $g(t,\tau)$ может быть приближена с точностью ε (где ε – произвольное как угодно малое число) полиномом $g_n(t,\tau)=\sum\limits_{k=0}^{n}\sum\limits_{l=0}^{n}\alpha_{kl}t^k\tau^l$.

Пусть

$$f_k(t)=\int\limits_0^t g(t,\tau)y_k(\tau)d\tau, k=2n+1,\ldots,3n+1, \tag{3.5.15}$$

где y_k – определенный ниже входной сигнал.

Тогда рассматривая вместо (3.5.15) уравнения

$$\tilde{f}_k(t)=\int\limits_0^t g_n(t,\tau)y_k(\tau)d\tau, k=2n+1,\ldots,3n+1, \tag{3.5.16}$$

приходим к задаче определения степени n и коэффициентов α_{kl} $(k,l=0,\ldots,n)$ полинома $g_n(t,\tau)$ по входным сигналам $y_k(t)$ и выходным сигналам $f_k(t)$. Напомним, что здесь $f_k(t)$ – выходной сигнал преобразователя (3.5.15), т.е. он не обязательно должен быть полиномом. Для определенности будем считать, что

$$y_k(t)=\begin{cases} k, & 0\le t\le T,\\ 0, & t\in(-\infty,\infty)\setminus[0,T].\end{cases}$$

Для определения степени n полинома $g_n(t,\tau)$, при котором достигается точность $\|g(t,\tau)-g_n(t,\tau)\|_{C[0,T]}\le\varepsilon$, можно поступить следующим образом. Пусть из физических соображений известно, что функция $g(t,\tau)$ имеет по переменной t производную до r порядка включительно, причем $\left\|\dfrac{\partial^r g(t,\tau)}{\partial t^r}\right\|_{C[0,T]}\le M$. Тогда функция $f_k(t)$ имеет производную до $(r+1)$ порядка включительно, ограниченную по норме пространства $C_{[0,T]}$ константой MTk.

Известно [63], что точность приближения функции $f_k(t)$ интерполяционным полиномом $P_s(f,[0,T])$, построенным по s узлам полинома Чебышева I рода, отображенным с сегмента $[-1,1]$ на сегмент $[0,T]$, оценивается неравенством

$$\|f_k(t)-P_s(f_k,[0,T])\|_{C[0,T]}\le\frac{1}{2^s s!}\max_{0\le t\le T}|f_k^{(s)}(t)|\left(\frac{T}{2}\right)^s.$$

Отсюда легко найти значение s, при котором

$$\|f_k(t)-P_s(f_k,[0,T])\|_{C[0,T]}\le\varepsilon.$$

Для этого достаточно решить неравенство

$$\frac{1}{2^s s!}\max_{0\le t\le T}|f_k^{(s)}(t)|\left(\frac{T}{2}\right)^s\le\varepsilon.$$

Таким образом, каждой функции $f_k(t)$ можно поставить в соответствие такое натуральное s_k, что

$$\|f_k(t)-P_{s_k}(f_k,[0,T])\|_{C[0,T]}\le\varepsilon.$$

Так как предполагалось, что полином $g_n(t,\tau)$ имеет степень n, то при входном сигнале $y_k, k=1,2,,\ldots,n$, выходной сигнал системы, описываемой уравнением (3.5.16) должен иметь степень $2n+Nk+1=s_k$. Отсюда находим значение n: $n=(s_k-Nm-1)/2$, если $n=(s_k-Nm-1)/2$ – целое число, или $n=[(s_k-Nm-1)/2]+1$, если $n=(s_k-Nm-1)/2$ – нецелое число.

Обозначим степень n, вычисленную при подаче входного сигнала y_k, через n_k.

В качестве степени n полинома $g_n(t,\tau)$ следует взять максимальное из чисел $n_k, k=1,2,\ldots,v$. Здесь параметр n носит эвристический характер и служит для подтверждения выполнения условия $\|g(t,\tau)-g_n(t,\tau)\|_{C[0,T]}\le\varepsilon$. Если n выбрано правильно, то при всех k

$$\|f_k(t)-P_n(f_k,[0,T])\|_C\le\varepsilon.$$

Отметим, что если гладкость функции $g(t,\tau)$ неизвестна, то функции $f_k(t)$ при каждом k имеют ограниченные производные первого порядка.

Определив таким образом n-ю степень полинома и воспользовавшись алгоритмом, описанным в первом случае, восстанавливаем коэффициенты разложения (3.5.10) функции $g(t,\tau)$.

Теперь, когда определены коэффициенты разложения функции $g(t,\tau)$ по степеням t,τ, определим коэффициенты a_k, k=1, …, N, уравнения (3.5.9).

При m=2n+1 найдем значения коэффициентов $a_k(k$=2, …, $N)$.

Если $\alpha_{0,0} \neq 0$, то

$$\begin{cases} a_2 = \dfrac{(4n+3) f_{4n+3}^{2n+1}}{\alpha_{0,0}}, \\ \\ a_3 = \dfrac{(6n+4) f_{6n+4}^{2n+1}}{\alpha_{0,0}}, \\ \dots \\ a_N = \dfrac{(N(2n+1)+1) f_{N(2n+1)+1}^{2n+1}}{\alpha_{0,0}}. \end{cases}$$

Если же $\alpha_{00} = 0$, то для определения остальных значений a_k, $k = 2, \dots, N$, можно воспользоваться уже известными (3.5.14) значениями α_{kl}. Например, значениями α_{10} и α_{01} :

$$\begin{cases} a_2 = \dfrac{f_{4n+4}^{2n+1}}{\left(\dfrac{\alpha_{1,0}}{4n+3} + \dfrac{\alpha_{0,1}}{4n+4}\right)}, \\ \\ a_3 = \dfrac{f_{6n+5}^{2n+1}}{\left(\dfrac{\alpha_{1,0}}{6n+4} + \dfrac{\alpha_{0,1}}{6n+5}\right)}, \\ \dots \\ a_N = \dfrac{f_{N(2n+1)+2}^{2n+1}}{\left(\dfrac{\alpha_{1,0}}{N(2n+1)+1} + \dfrac{\alpha_{0,1}}{N(2n+1)+2}\right)}. \end{cases}$$

Для определения коэффициентов α_{kl}, $k,l = 0, \dots, n$, на вход устройства (3.5.9) подаются сигналы (3.5.11), где m=2n+1, …, 3n+1.

В случае, когда на вход (3.5.9) подаются сигналы (3.5.11) начиная с $m = 0, \dots, n$, системы линейных уравнений (3.5.14) принимают более громоздкий вид. Приведем их для случая $N = 2$.

При $x(\tau) = 1$ на выходе получим следующую функцию:

$$f_0(t) = (a_1 + a_2)\left(\alpha_{00} t + \left(\frac{\alpha_{10}}{1} + \frac{\alpha_{01}}{2}\right) t^2 + \dots\right.$$

$$\left. \dots + \left(\frac{\alpha_{n0}}{1} + \dots + \frac{\alpha_{0n}}{n+1}\right) t^{n+1} + \dots + \frac{\alpha_{nn}}{n+1} t^{2n+1}\right).$$

При $x(\tau) = \tau^k (k \le n)$ получим

$$f_k(t) = a_1 \frac{\alpha_{00}}{k+1} t^{k+1} + a_1 \left(\frac{\alpha_{10}}{k+1} + \frac{\alpha_{01}}{k+2} \right) t^{k+2} + \dots$$

$$\dots + \left(a_1 \left(\frac{\alpha_{k0}}{k+1} + \dots + \frac{\alpha_{0k}}{2k+1} \right) + a_2 \frac{\alpha_{00}}{2k+1} \right) t^{2k+1} + \dots$$

$$\dots + \left(a_1 \left(\frac{\alpha_{n0}}{k+1} + \dots + \frac{\alpha_{0n}}{n+k+1} \right) + \right.$$

$$\left. + a_2 \left(\frac{\alpha_{n-k,0}}{2k+1} + \dots + \frac{\alpha_{0,n-k}}{n+k+1} \right) \right) t^{n+k+1} + \dots$$

$$\dots + \left(a_1 \left(\frac{\alpha_{nk}}{2k+1} + \dots + \frac{\alpha_{kn}}{n+k+1} \right) + \right.$$

$$\left. + a_2 \left(\frac{\alpha_{n,0}}{2k+1} + \dots + \frac{\alpha_{0,n}}{n+2k+1} \right) \right) t^{n+2k+1} + \dots$$

$$\dots + \left(a_1 \frac{\alpha_{nn}}{n+k+1} + a_2 \left(\frac{\alpha_{n,k}}{n+2k+1} + \dots + \frac{\alpha_{k,n}}{n+2k+1} \right) \right) t^{2n+k+1} +$$

$$+ a_2 \left(\frac{\alpha_{n,k+1}}{n+k+2} + \dots + \frac{\alpha_{k+1,n}}{n+2k+1} \right) t^{n+2k+2} + \dots$$

$$\dots + a_2 \frac{\alpha_{nn}}{n+2k+1} t^{2n+2k+1}.$$

При $x(\tau) = \tau^n$ получим

$$f_n(t) = a_1 \frac{\alpha_{00}}{n+1} t^{n+1} + a_1 \left(\frac{\alpha_{10}}{n+1} + \frac{\alpha_{01}}{n+2} \right) t^{n+2} + \dots$$

$$\dots + \left(a_1 \frac{\alpha_{nn}}{2n+1} + a_2 \left(\frac{\alpha_{n,0}}{2n+1} + \dots + \frac{\alpha_{0,n}}{3n+1} \right) \right) t^{3n+1} +$$

$$+ a_2 \left(\frac{\alpha_{n,1}}{2n+2} + \dots + \frac{\alpha_{1,n}}{3n+1} \right) t^{3n+2} + \dots + a_2 \frac{\alpha_{nn}}{3n+1} t^{4n+1}.$$

Для нахождения неизвестных коэффициентов α_{kl} и значения a_2 составим, как и в предыдущем случае, системы линейных уравнений следующего вида:

$$\begin{cases} a_1 = 1, \\ (a_1 + a_2)\alpha_{0,0} = f_1^0, \\ a_1 \dfrac{\alpha_{0,0}}{2} = f_2^1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha_{1,0}}{1} + \dfrac{\alpha_{0,1}}{2} = \dfrac{f_2^0}{(a_1 + a_2)}, \\ \dfrac{\alpha_{1,0}}{2} + \dfrac{\alpha_{0,1}}{3} = \dfrac{f_3^1}{a_1} - a_2 \dfrac{\alpha_{0,0}}{3}; \end{cases}$$

$$\cdots$$

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha_{n,0}}{1} + \cdots + \dfrac{\alpha_{0,n}}{n+1} = \dfrac{f_{n+1}^0}{(a_1 + a_2)}, \\ \dfrac{\alpha_{n,0}}{2} + \cdots + \dfrac{\alpha_{0,n}}{n+2} = \dfrac{f_{n+2}^1}{a_1} - a_2 \left(\dfrac{\alpha_{n-1,0}}{3} + \cdots + \dfrac{\alpha_{0,n-1}}{n+1} \right), \\ \cdots \\ \dfrac{\alpha_{n,0}}{n+1} + \cdots + \dfrac{\alpha_{0,n}}{2n+1} = \dfrac{f_{2n+1}^n}{a_1} - a_2 \dfrac{\alpha_{0,0}}{2n+1}; \end{cases}$$

$$\cdots$$

$$\frac{\alpha_{n,n}}{n+1} = \frac{f_{2n+1}^0}{a_1 + a_2}.$$

Из полученных выше систем находим искомые коэффициенты: из первой системы находим значения a_2, α_{00}; из второй — значения α_{10}, α_{01}, используя уже известные значения a_2, α_{00}, найденные из первой системы. Продолжая последовательно данный процесс, найдем значения искомых коэффициентов $a_2, \alpha_{kl}, k, l = 0, \ldots, n$. Значение для a_1 полагаем, как и прежде, равным единице, что не ограничивает применения данного метода.

Приведем модельные примеры.

Пример 3.5.4. Рассмотрим измерительный преобразователь, описываемый уравнением (3.5.9), где

$$g(t, \tau) = \sum_{k=0}^{3} \sum_{l=0}^{3} \alpha_{kl} t^k \tau^l;$$

коэффициенты нелинейного измерительного преобразователя α_{kl}, $k, l = 0, \ldots, 3$, в уравнении (3.5.9), определяются матрицей A,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}, \; a_k = k, k = 1, 2, 3,$$

Ставится задача: располагая значениями выходных сигналов, соответствующих входным $x_m(t) = t^m, m = 7, \ldots, 10$, определить значения $\alpha_{kl}, k, l = 0, \ldots, 3$ и a_k, $k = 1, 2, 3$.

Решение. Составляя указанным выше способом системы линейных уравнений и решая их, получим следующую матрицу коэффициентов α_{kl}, $k = 0, 1, \ldots, 3$:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$$

и набор коэффициентов a_k: $a_1 = 1.000; a_2 = 2.000; a_3 = 3.000$.

Из сравнения вычисленных коэффициентов с точными следует эффективность предложенного метода.

Пример 3.5.5. Рассмотрим нелинейный измерительный преобразователь, функционирование которого описывается следующем уравнением:

$$f(t) = a_1 \int_0^t g(t, \tau) x(\tau) d\tau + a_2 \int_0^t g(t, \tau) x^2(\tau) d\tau,$$

где $g(t, \tau) = (1 + t)e^{-\tau}, a_1 = 1, a_2 = 2$.

Требуется определить значения функции $g(t, \tau)$ в прямоугольнике $\left[0, \frac{1}{10}; 0, \frac{1}{10}\right]$ и значения коэффициентов a_1, a_2.

Решение. Результаты восстановления коэффициентов a_1 и a_1 приведены в табл. 3.8 и функции $g(t, \tau)$ приведены в табл. 3.9, 3.10.

Приведенные примеры иллюстрируют эффективность изложенного метода.

Таблица 3.8. Результаты восстановления коэффициентов a_1, a_2

коэффициенты	точные значения	восстановленные значения
a_1	1.000	1.000
a_2	2.000	2.000

Таблица 3.9. Точные значения функции $g(t, \tau)$

t \ τ	0.00	0.02	0.04	0.06	0.08	0.1
0.00	1.00	0	0	0	0	0
0.02	1.02	0.999	0	0	0	0
0.04	1.04	1.019	0.999	0	0	0
0.06	1.06	1.039	1.018	0.998	0	0
0.08	1.08	1.059	1.038	1.017	0.997	0
0.1	1.10	1.078	1.057	1.036	1.015	0.405

Таблица 3.10. Восстановленные значения функции $g(t, \tau)$

t \ τ	0.00	0.02	0.04	0.06	0.08	0.1
0.00	1.00	0	0	0	0	0
0.02	1.02	0.999	0	0	0	0
0.04	1.04	1.019	0.999	0	0	0
0.06	1.06	1.039	1.018	0.998	0	0
0.08	1.08	1.059	1.038	1.017	0.997	0
0.1	1.10	1.078	1.057	1.036	1.015	0.405

Глава 4

Параметрическая идентификация динамических систем

В монографии [184] отмечается, что в зависимости от априорной информации об объекте управления различают задачи идентификации в узком и широком смысле: «Задача идентификации в узком смысле состоит в оценивании параметров и состояний системы по результатам наблюдений над входными и выходными переменными, полученными в условиях функционирования объекта».

В данном разделе задача идентификации понимается в узком смысле (как параметрическая идентификация): предполагается, что известна структура (математическая модель) объекта и требуется определить ее параметры.

В работе [62] отмечается: "Идентификация в настоящее время – обязательный элемент и наиболее сложная стадия решения актуальных прикладных задач. В процессе идентификации создаются адекватные модели, необходимые для практического использования математических методов и сложных наукоемких технологий. Ввиду этого разработка методов и алгоритмов идентификации приобретает в настоящее время исключительно важное значение для фундаментальной науки".

Проблемам идентификации посвящено большое число книг, обзоров и статей, из которых отметим следующие [14, 69, 73, 120, 179, 184], обзоры [9,135], в которых содержится обширная библиография, охватывающая практически все направления структурной и параметрической идентификации. Современное состояние и тенденции развития методов идентификации отражены в обзорах [9, 135].

4.1. Параметрическая идентификация непрерывных динамических систем

4.1.1. Определение коэффициентов обыкновенных дифференциальных уравнений, моделирующих динамические системы

Большой класс задач идентификации связан с определением коэффициентов дифференциальных уравнений

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) =$$
$$= b_m x^{(m)}(t) + b_{m-1} x^{(m-1)}(t) + \cdots + b_1 x'(t) + b_0 x(t) \qquad (4.1.1)$$

с данными Коши

$$y^{(k)}(0) = y_k,\ k = 0, 1, \ldots, n-1, \qquad (4.1.2)$$

описывающих функционирование систем автоматического управления. Здесь $x(t)$ и $y(t)$ – входной и выходной сигналы соответственно.

На первый взгляд, наиболее естественный способ определения коэффициентов $\{a_k\}, k = 0, \ldots, n-1)$, и $\{b_l\}$, $l = 0, \ldots, m-1$, заключается в табулировании значений входного $x(t)$ и выходного $y(t)$ сигналов в определенные фиксированные моменты времени и составлении системы линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $\{a_i\}$ и $\{b_j\}$.

Однако этот способ имеет два существенных недостатка. Первый заключается в том, что задача дифференцирования является некорректной [170] и вычисление производных высоких порядков по значениям, имеющим случайный характер, требует мощных регуляризующих алгоритмов. Второй недостаток носит, скорее, теоретический характер и заключается в том, что матрица полученной системы уравнений имеет случайный характер и невозможно доказать ее обратимость в общем случае.

Для преодоления этих недостатковв в [132] предлагается задавать эталонные входные сигналы $x_e(t)$, у которых легко определяются производные. По проведенным наблюдениям составляется система уравнений

$$\sum_{i=0}^{n-1} y^{(i)}(\tau_i) a_j - \sum_{i=0}^{m} x_e^{(i)}(\tau_j) b_j - y^{(n)}(\tau_j), \qquad (4.1.3)$$

где $j = 1, 2, \ldots, s,\ s > m + n + 1,\ \tau_j$ – фиксированные моменты времени.

Непосредственное решение системы уравнений (4.1.3) также сопряжено с большими трудностями, и поэтому в [132] предложено решение этой системы методом наименьших квадратов путем минимизации функционала

$$\alpha = \sum_{j=1}^{s} w(\tau_j)\alpha_j^2,$$

где α_j является невязкой уравнения (4.1.3), а $w(\tau_j)$ – весовыми коэффициентами.

При этом задача устойчивого вычисления производных высоких порядков остается открытой, и для ее решения в [132] предлагается несколько регуляризующих алгоритмов.

Интересный метод определения коэффициентов дифференциальных уравнений при $n = m, a_0 = 1$ изложен в [127]. Для реализации этого метода требуется выполнение условий

$$\frac{1}{T}\int_0^T x^{(i)}(t)dt = 0,\ \frac{1}{T}\int_0^T y^{(j)}(t)dt = 0,\ i, j = 0, 1, \ldots, n.$$

Изложим некоторую модификацию этого метода в предположении, что выполнены условия

$$x^{(i)}(T) = x^{(i)}(0) = 0,\ i = 0, 1, 2, \ldots, m-1,$$

$$y^{(j)}(T) = y^{(j)}(0) = 0,\ j = 0, 1, 2, \ldots, m-1.$$

Этим условием удовлетворяет широкий класс устройств автоматического управления.

Вычисляя моменты уравнения (4.1.1) относительно системы функций $\{t^k\},\ k = 0, 1, \ldots, l$, где $l = m + n + 1$, имеем

$$a_0\int_0^T y(t)dt + b_0\int_0^T x(t)dt = 0,$$

$$a_0\int_0^T y(t)tdt - a_1\int_0^T y(t)dt + b_0\int_0^T x(t)tdt + b_1\int_0^T x(t)dt = 0,$$

$$\ldots$$

$$a_0 \int_0^T y(t)t^l dt - a_1 \int_0^T y(t)t^{l-1} dt + \dots$$

$$\dots + (-1)^n a_n \frac{l}{(l-n)!} \int_0^T y(t)t^{l-n} dt +$$

$$+b_0 \int_0^T x(t)t^l dt + \dots + (-1)^n b_m \frac{l}{(l-n)!} \int_0^T x(t)t^{l-n} dt = 0. \qquad (4.1.4)$$

Из нетривиального решения этой системы (если оно существует) определяются коэффициенты уравнения (4.1.1). При этом, возможно, решение будет неединственным.

Из анализа изложенного метода следует простой и устойчивый способ определения коэффициентов объекта, функционирование которого определяется дифференциальным оператором

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = x(t)$$

с данными Коши

$$y^{(n-1)}(0) = \dots = y'(0) = y(0) = 0.$$

Модификация этого метода применима и к уравнениям вида

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = x(t) \qquad (4.1.5)$$

с данным Коши

$$y^{(k)}(0) = y_k, \ k = 0, 1, 2, \dots, n-1. \qquad (4.1.6)$$

Для нахождения коэффициентов a_k, k=0, 1, …, n, вычислим моменты уравнения (4.1.5) относительно функций t^k, k=1, 2, …, n+1, в сегменте $[0, T]$, в котором

$$\int_0^T y(t)dt \neq 0.$$

В этом случае $b_0 = 1, \ b_i = 0, i = 1, 2, \dots, m-1$, и при условии $\int_0^T y(t)dt \neq 0$ система уравнений (4.1.4) имеет треугольную матрицу с определителем, отличным от нуля.

Рассмотрим линейный стационарный объект, функционирование которого описывается системой дифференциальных уравнений:

$$x'(t) = Ax(t) + f(t), \tag{4.1.7}$$

где $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))^T$, $f(t) = (f_1(t), \ldots, f_n(t))^T$, $A = \{a_{kl}\}$, $k, l = \overline{1, n}$. Здесь $x(t)$ – входной, $f(t)$ – выходной сигналы.

Ставится задача определения коэффициентов $a_{kl}(k, l{=}1, \ldots, n)$.

Пусть $\varphi(t)$ – финитная функция с носителем $[0, T]$, причем будем считать, что $\varphi(0) = 0$.

Введем обозначения:

$$\overline{\varphi}(t) = \int_t^T \varphi(\tau)d\tau = \int_t^\infty \varphi(\tau)d\tau,$$

$$f^i(t) = (f_1^i(t), \ldots, f_n^i(t)) \text{ и } \overline{f}^i(t) = (\overline{f}_1^i(t), \ldots, \overline{f}_n^i(t)),$$

$f^i(t), \overline{f}^i(t)$ – выходные сигналы устройства, описываемые системой уравнений (4.1.7) при подаче на вход сигналов

$$x^i(t) = (0, \ldots, 0, \varphi(t), 0, \ldots, 0) \text{ и } \overline{x}^i(t) = (0, \ldots, 0, \overline{\varphi}(t), 0, \ldots, 0),$$

где все компоненты векторов x^i и $\overline{x}^i$, кроме i-х, равны нулю.

Применим к системе уравнений (4.1.7) преобразование Лапласа в предположении, что входной сигнал равен $x^i(t)$, а выходной сигнал соответственно равен $f^i(t)$. Тогда

$$pX^i(p) = AX^i(p) + F^i(p), \tag{4.1.8}$$

где $X^i(p), F^i(p)$ – преобразование Лапласа векторов $x^i(t)$, $i{=}1, 2, ..., n$.

Аналогично применим к системе уравнений (4.1.7) преобразование Лапласа в предположении, что входной сигнал $\overline{x}^i(t)$, а выходной сигнал $\overline{f}^i(t), i = 1, 2, \ldots, n$.

В результате имеем

$$-X^i(p) = A\left(L\left(\int_0^\infty x^i(\tau)d\tau - \int_0^t x^i(\tau)d\tau\right)\right) + \overline{F}^i(p),$$

отсюда

$$-X^i(p) + \frac{1}{p}AX^i(p) = \overline{F}^i(p) + \frac{1}{p}A\left(\int_0^\infty x^i(\tau)d\tau\right). \tag{4.1.9}$$

Разделив (4.1.8) на p и почленно сложив с уравнением (4.1.9), имеем

$$A\left(\frac{1}{p}\int\limits_0^\infty x^i(\tau)d\tau\right) = -\frac{1}{p}F^i(p) - \overline{F}^i(p).$$

Переходя к оригиналам и учитывая структуру вектора $\left\{\int\limits_0^\infty x^i(\tau)d\tau\right\}$, получаем искомую формулу:

$$a_{ki} = -\frac{\int\limits_0^t f_k^i(\tau)d\tau + \overline{f}_k^i(t)}{\int\limits_0^T \varphi(\tau)d\tau},\ k,i = 1,2,\ldots,n. \tag{4.1.10}$$

Пример 4.1.1. Рассмотрим устройство, описываемое дифференциальным оператором:

$$x_1'(t) = x_1(y) - x_2(t),$$
$$x_2'(t) = 2x_1(y) + 3x_2(t).$$

Ставится задача: определить элементы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение. Пусть

$$\varphi(t) = \begin{cases} t & \text{при } 0 \le t \le T, \\ 0 & \text{при } t \notin [0,T], \end{cases} \qquad \psi(t) = \begin{cases} \frac{T^2}{2} - \frac{t^2}{2} & \text{при } 0 \le t \le T, \\ 0 & \text{при } t \notin [0,T]. \end{cases}$$

Подадим на вход устройства последовательно сигналы

$$x^1(t) = \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ 0 \end{pmatrix},\ \overline{x}^1(t) = \begin{pmatrix} \psi(t) \\ 0 \end{pmatrix},$$
$$x^2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi(t) \end{pmatrix},\ \overline{x}^2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi(t) \end{pmatrix}.$$

Соответствующие выходные сигналы равны (при $0 \le t \le T$)

$$f^1(t) = \begin{pmatrix} 1-t \\ -2t \end{pmatrix},\ \overline{f}^1(t) = \begin{pmatrix} \frac{t^2}{2} - t - \frac{T^2}{2} \\ -T^2 + t^2 \end{pmatrix},$$

$$f^2(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1-3t \end{pmatrix}, \ \overline{f}^2(t) = \begin{pmatrix} \frac{T^2}{2} - \frac{t^2}{2} \\ -t - \frac{3}{2}T^2 + \frac{3}{2}t^2 \end{pmatrix}.$$

Тогда из формулы (4.1.10) имеем

$$a_{11} = 1, \ a_{21} = 2, \ a_{12} = -1, \ a_{22} = 3.$$

Таким образом, точно определены коэффициенты матрицы A.

Приведем еще одно доказательство формул (4.1.10). Для этого вновь вернемся к системе уравнений (4.1.7). Для простоты изложения ограничимся рассмотрением системы из двух уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + f_1(t), \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + f_2(t), \end{aligned} \tag{4.1.11}$$

где, как и выше, $x(t)=(x_1(t), x_2(t))$ – входной, $f(t)=(f_1(t), f_2(t))$ – выходной сигналы.

Ставится задача определения коэффициентов $\{a_{kl}\}, k, l = 1, 2$.

Пусть $\varphi(t)$ – финитная функция с носителем $[0, T]$, причем будем считать, что $\varphi(0) = 0$. Через $\overline{\varphi}(t)$ обозначим функцию

$$\overline{\varphi}(t) = \int_t^T \varphi(\tau)d\tau.$$

Подадим на вход системы (4.1.11) входной сигнал $x(t) = (\varphi(t), 0)$.

Тогда выход имеет вид

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \varphi'(t) - a_{11}\varphi(t), \\ f_2(t) &= -a_{21}\varphi(t). \end{aligned} \tag{4.1.12}$$

Подадим на вход системы (4.1.11) входной сигнал $\overline{x}(t) = \begin{pmatrix} \int_t^T \varphi(t), 0 \end{pmatrix}$ и рассмотрим выходной сигнал при $t > 0$, тогда

$$\overline{f}_1(t) = -\varphi(t) - a_{11}\int_t^T \varphi(\tau)d\tau, \ \overline{f}_2(t) = -a_{21}\int_t^T \varphi(\tau)d\tau. \tag{4.1.13}$$

Проинтегрируем уравнения системы (4.1.12) и сложим почленно проинтегрированные уравнения системы (4.1.12) и уравнения системы (4.1.13). Имеем

$$\int_0^t f_1(\tau)d\tau + \overline{f}_1(t) = -a_{11}\int_0^T \varphi(\tau)d\tau,$$
$$\int_0^t f_2(\tau)d\tau + \overline{f}_2(t) = -a_{21}\int_t^T \varphi(\tau)d\tau,$$

отсюда

$$a_{11} = -\frac{\int_0^t f_2(\tau)d\tau + \overline{f}_1(t)}{\int_0^T \varphi(\tau)d\tau}, a_{21} = -\frac{\int_0^t f_2(\tau)d\tau + \overline{f}_2(t)}{\int_0^T \varphi(\tau)d\tau}.$$

Коэффициенты a_{12} и a_{22} находятся аналогично.

По сравнению с формулами (4.1.10), предложенный алгоритм позволяет вдвое уменьшить число пробных сигналов.

В ряде случаев для определения коэффициетов дифференциального уравнения можно ограничиться подачей на вход устройства n входных сигналов. Нетрудно видеть, что для этого финитный входной сигнал $\varphi_i(t)$ с носителем $[0, T]$ должен удовлетворять условию: существует константа α такая, что $\varphi(t+\alpha) = \int_t^T \varphi(\tau)d\tau$. Например, функция

$$\varphi(t) = \begin{cases} \sin t & \text{при } t \in [0,T], T = (2k+1)\dfrac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{при } t \notin [0,T] \end{cases} \tag{4.1.14}$$

обладает этим свойством при $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$.

Подадим на вход устройства вектор входных сигналов:

$$x^i(t) = (0, \ldots, 0, \varphi(t), 0, \ldots, 0).$$

Выходной вектор имеет вид

$$f^i(t) = (f_1^i(t), \ldots, f_n^i(t)).$$

Запомним значения $f^i(t)$ на сегменте $[0, T_1], T_1 = T + \dfrac{\pi}{2}$.

Нетрудно видеть, что вектор $f^i(t)$ при $t \in \left[\frac{\pi}{2}, T+\frac{\pi}{2}\right]$ является выходом устройства (4.1.7) при подаче на его вход вектора входных сигналов $\overline{x}^i(t) = (0,\ldots,0,\overline{\varphi}(t),0,\ldots,0),\ \overline{\varphi}(t) = \int\limits_t^T \varphi(t)dt,\ t \in [0,T]$.

Таким образом, имея реакции исследуемого устройства на векторы входных сигналов $x^i(t)$ и $\overline{x}^i(t), t \in [0,T]$, по формулам (4.1.10) вычисляем коэффициенты дифференциального оператора.

Проиллюстрируем изложенное на приведенном выше примере.

Пример 4.1.2. Подадим на вход устройства последовательно сигналы

$$x^1(t) = \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ 0 \end{pmatrix},\ \ x^2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi(t) \end{pmatrix},$$

где функция $\varphi(t)$ определена формулой (4.1.14).

Требуется определить коэффициенты матрицы A.

Решение. Выходные сигналы будут иметь вид

$$f_1(t) = \begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ -2\sin t \end{pmatrix},\ \ f_2(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t - 3\sin t \end{pmatrix}.$$

Соответствующие входным векторам $\overline{x}^1(t)$ и $\overline{x}^2(t)$ выходные векторы имеют вид

$$\overline{f}_1(t) = \begin{pmatrix} -\sin t - \cos t \\ -2\cos t \end{pmatrix},\ \ \overline{f}_2(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t - 3\cos t \end{pmatrix}.$$

Воспользовавшись формулами (4.1.10), имеем $a_{11} = 1, a_{21} = 2$, $a_{12} = -1$, $a_{22} = 3$. Таким образом, точно определены коэффициенты матрицы A.

Рассмотрим нестационарный объект, функционирование которого описывается системой дифференциальных уравнений

$$x'(t) = A(t)x(t) + f(t),$$

где $A(t) = \{a_{kl}(t)\}_{k,l=\overline{1,n}}$.

Для нахождения коэффициентов $a_{kl}(t)$ при $t \in [0,T]$ можно воспользоваться следующим приемом. Разобьем сегмент $[0,T]$ на N частей точками $t_k = kT/N$, $k = 0,1,\ldots,N$, и будем искать матрицу $\overline{A}(t) = \{\overline{a}_{kl}(t)\}$, состоящую из кусочно-постоянных на интервалах $\Delta_k = [t_k, t_{k+1}]$, $(k = 0,1,\ldots,N-1)$ функций. Будем считать, что на сегменте $[t_j, t_{j+1}]$ функции $\overline{a}_{kl}(t)$ равна $\overline{a}_{kl}(t_j)$. Для нахождения констант $\overline{a}_{kl}(t_j)$, $k,l = 1,2,\ldots,n$, $j = 0,1,\ldots,N-1$ введем функции

$\varphi_j(t)$ финитные с носителями, равными Δ_j $(j = 0, 1, \ldots, N-1)$. После этого константы $\overline{a}_{kl}(t_j)$ определяются способами, описанными выше.

Вопросы погрешности, возникающие при апроксимации матрицы $A(t)$ матрицей $\overline{A}(t)$, остаются открытыми.

При практической реализации предложенных алгоритмов следует на вход устройства подавать сигналы, описываемые функциями, непрерывно дифференцируемыми на сегменте $[-a, T+a]$, где $a = \text{const} > 0$. Это связано с тем, что переходной процесс, возникающий в устройстве при подаче на вход сигнала, имеющего скачок при $t = 0$, будет давать погрешность.

В ряде случаев оказывается более предпочтительным вместо систем дифференциальных уравнений описывать объекты дифференциальными уравнениями высоких порядков.

Рассмотрим линейный стационарный преобразователь, функционирование которого описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$Ky = y^{(n)}(t) + q_1 y^{(n-1)}(t) + \cdots + q_n y(t) = f(t) \tag{4.1.15}$$

с начальными условиями

$$y(0) = y'(0) = \cdots = y^{(n-1)}(0) = 0, \tag{4.1.16}$$

где $f(t)$ – реакция преобразователя на тестовое входное воздействие $y(t)$, $q_i = \text{const}(i = 1, 2, \ldots, n)$ – идентифицируемые параметры.

Предположим, что известен порядок n $(n \geq 2)$ уравнения (4.1.15) и неизвестны коэффициенты $q_1, \ldots, q_n$. Ставится задача определения коэффициентов $q_1, \ldots, q_n$. Изложим решение этой задачи, следуя работе [15].

Возьмем две базисные функции $\varphi(t)$ и $\varphi_1(t) = \int\limits_t^T \varphi(t)dt$.

Представим входные сигналы в виде функций

$$y(t) = \frac{1}{(n-1)!}\int\limits_0^t (t-\tau)^{n-1}\varphi(\tau)d\tau, y_1(t) = \frac{1}{(n-1)!}\int\limits_0^t (t-\tau)^{n-1}\varphi_1(\tau)d\tau,$$

тогда

$$y'(t) = \frac{1}{(n-2)!}\int\limits_0^t (t-\tau)^{n-2}\varphi(\tau)d\tau, \ldots, y^{(n)}(t) = \varphi(t).$$

Подставив значения функции $y(t)$ и ее производных в оператор Ky, имеем

$$Ky \equiv \varphi + K_0\varphi \equiv \varphi(t) + \frac{d}{dt}\int\limits_0^t \sum_{k=1}^{n} q_k \frac{(t-\tau)^k}{k!}\varphi(\tau)d\tau = f(t). \quad (4.1.17)$$

Введем обозначения: $h(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} q_k \frac{(t-\tau)^k}{k!}$.

Представим уравнение (4.1.17) в виде

$$K_0\varphi \equiv \frac{d}{dt}\int\limits_0^t h(t-\tau)\varphi(\tau)d\tau = f(t) - \varphi(t). \quad (4.1.18)$$

Будем считать входные сигналы $y_i(\tau)$, $i = 1, 2$, с финитными носителями $[0, T]$.

Введем, следуя [147], операторы

$$A_0 f = \int\limits_0^t f(\tau)d\tau, A_0^* f = -\int\limits_t^T f(\tau)d\tau, t \in [0, T],$$

где f – произвольный элемент пространства $L_2[0, T]$ функций суммируемых с квадратом.

В работе [147] показано, что для любого ограниченного оператора $L\varphi = \frac{d}{dt}\int\limits_0^T s(t-\tau)\varphi(\tau)d\tau$ с разностным ядром имеет место равенство

$$(iA_0L - L(iA_0^*))\varphi = i\int\limits_0^T \varphi(\tau)\left[M(t) + N(\tau)\right]d\tau, \quad (4.1.19)$$

где $M(t) = s(t), N(t) = -s(-t), 0 \le t \le T, \varphi(t)$ – произвольная функция из пространства $L_2[0, T]$.

Применим тождество (4.1.19) к анализу уравнения (4.1.18). Полагая $M(t) = h(t), N(t) \equiv 0$, нетрудно видеть, что

$$h(t)\int\limits_0^T \varphi(\tau)d\tau = \int\limits_0^t (f(\tau) - \varphi(\tau))d\tau - K_0\left(-\int\limits_t^T \varphi(\tau)d\tau\right).$$

При этом $K_0\left(-\int\limits_t^T \varphi(\tau)d\tau\right) = Ky_1 - \varphi_1$, где $\varphi_1 = -\int\limits_t^T \varphi(\tau)d\tau$,

$y_1(\tau) = \dfrac{1}{(n-1)!}\int\limits_0^T (t-\tau)^{n-1}\varphi_1(\tau)d\tau.$

Воспользовавшись этими равенствами, имеем

$$h(t) = \left(\int\limits_0^t f(\tau)d\tau - \int\limits_0^T \varphi(\tau)d\tau - Ky_1\right) \Big/ \int\limits_0^T \varphi(\tau)d\tau. \qquad (4.1.20)$$

Разлагая функцию $h(t)$ в ряд по степеням t и учитывая, что $h(t) = \sum\limits_{i=1}^{n} q_i \dfrac{t^i}{i!}$, находим

$$q_i = h^{(i)}(0), i = 1, 2, \ldots, n. \qquad (4.1.21)$$

Проиллюстрируем один из способов реализации предложенного метода на примере определения параметров устройства, описываемого дифференциальным оператором второго порядка.

Пример 4.1.3. Пусть этим оператором будет $Ay = y'' + 2y' + 3y$ при начальных значениях $y(0) = y'(0) = 0$.

Здесь $q_1 = 2, q_2 = 3$. Полагая эти коэффициенты неизвестными, требуется восстановить их значения.

Решение. По формулам (4.1.21)–(4.1.22) определим коэффициенты q_1, q_2. Положим $\varphi(t) \equiv 1$. Тогда

$$y(t) = \frac{t^2}{2}; y_1(t) = -\frac{T}{2}t^2 + \frac{t^3}{6};\ f(t) = 1 + 2t + \frac{3t^2}{2};$$

$$Ky_1 = -T + t - 2Tt + t^2 - \frac{3T}{2}t^2 + \frac{1}{2}t^3.$$

Подставляя эти значения в (4.1.20), имеем $h(t) = 2t + \frac{3}{2}t^2$. Из (4.1.21) следует, что $q_1 = 2, q_2 = 3$, что и требовалось доказать.

Рассмотрим еще один способ идентификации линейного объекта, функционирование которого описывается дифференциальным оператором

$$Ky \equiv y^{(n)}(t) + q_1 y^{(n-1)}(t) + \cdots + q_n y(t) = f(t),$$

где $f(t)$ – реакция устройства на входное воздействие $y(t)$.

Для определения коэффициентов $\{q_k\}, k = 1, 2, \ldots, n$, подадим $2n$ сигналов.

Пусть $\varphi(t)$ – финитная функция с носителем $[0, 2T]$, имеющая непрерывные производные до n порядка включительно. Пусть $\varphi(t) \equiv 0$ при $t \in [0, T]$, причем $\varphi^{(k)}(T) = 0, k = 0, 1, \cdots, n-1$.

Подадим входной сигнал

$$y_1 = \begin{cases} \varphi(t) & \text{при } t \in [0, 2T], \\ 0 & \text{при } t \notin [0, 2T]. \end{cases}$$

Реакцию устройства на входной сигнал $y_1(t)$ обозначим через $f_1(t)$.

Обозначим через $\overline{y}_1(t)$ входной сигнал

$$\overline{y}_1 = \begin{cases} \int\limits_t^{2T} \varphi(t) & \text{при } t \in [0, 2T], \\ 0 & \text{при } t \notin [0, 2T]. \end{cases}$$

Реакцию устройства на входной сигнал $\overline{y}_1(t)$ обозначим через $\overline{f}_1(t)$.

Будем полагать, что $\int\limits_T^{2T} \varphi(\tau)d\tau \neq 0$. Тогда при $t \geq T$

$$\int\limits_T^t f_1(\tau)d\tau = q_n \int\limits_T^t \varphi(\tau)d\tau + q_{n-1}\varphi(t) + q_{n-2}\varphi'(t) + \cdots + \varphi^{n-1}(t).$$

Одновременно при $t \geq T$

$$\overline{f}_1(t) = q_n \int\limits_t^{2T} \varphi(\tau)d\tau - q_{n-1}\varphi(t) - \cdots - \varphi^{n-1}(t).$$

Складывая эти равенства, имеем при $t \geq T$

$$q_n = \frac{\int\limits_T^t f_1(\tau)d\tau + \overline{f}_1(t)}{\int\limits_T^{2T} \varphi(\tau)d\tau}.$$

Отметим, что так как функция $\varphi(t) \equiv 0$ при $t \in [0, T]$, то $\int\limits_t^{2T} \varphi(\tau)d\tau \equiv \int\limits_T^{2T} \varphi(\tau)d\tau$ при $t \in [0, T]$. Это сделано для того, чтобы (при достаточно больших T) переходные процессы в устройстве закончились при $t = T$.

Для определения q_{n-1} положим

$$\varphi_1(t) = \begin{cases} \int\limits_0^t \varphi(\tau)d\tau & ,t \in [0,2T], \\ 0, & t \notin [0,2T], \end{cases}$$

$$\overline{\varphi}_1(t) = \begin{cases} \int\limits_0^t \int\limits_\tau^{2T} (\varphi(\sigma)d\sigma)d\tau, & t \in [0,2T], \\ 0, & t \notin [0,2T]. \end{cases}$$

Выходные сигналы, соответствующие входным сигналам $\varphi_1(t)$ и $\overline{\varphi}_1(t)$, равны $f_2(t)$ и $\overline{f_2(t)}$. Нетрудно видеть, что

$$f_2(t) = q_n \int\limits_0^t \varphi(\tau)d\tau + q_{n-1}\varphi(t) + \cdots + q_1\varphi^{n-2}(t) + \varphi^{n-1}(t),$$

$$\overline{f}_2(t) = q_n \int\limits_0^t \left(\int\limits_\tau^{2T} \varphi(\sigma)d\sigma \right) d\tau + q_{n-1} \int\limits_t^{2T} \varphi(\tau)d\tau - q_{n-2}\varphi(t) - \cdots - \varphi^{n-2}(t).$$

Интегрируя функцию $f_2(t)$ и результат почленно складывая с $\overline{f}_2(t)$, имеем при $t \geq T$

$$q_{n-1} = \frac{\int\limits_0^t f_2(t)dt - q_n \int\limits_0^t \int\limits_0^t \varphi(\tau)d\tau dt + \overline{f_2(t)} - q_n \int\limits_0^t \left(\int\limits_{t_1}^{2T} \varphi(\tau)d\tau \right) dt_1}{\int\limits_0^{2T} \varphi(\tau)d\tau}.$$

Продолжая этот процесс, последовательно находим коэффициенты q_{n-2}, q_{n-3},..., q_1.

Например, для определения коэффициентов q_{n-i} введем функции

$$\varphi_i(t) = \begin{cases} \underbrace{\int\limits_0^t \int\limits_0^{t_i} \cdots \int\limits_0^{t_2}}_{i} \varphi(t_1)dt_1 \ldots dt_i, & \text{при } 0 \leq t \leq 2T; \\ 0 & \text{при } t \notin [0,2T]; \end{cases}$$

$$\overline{\varphi}_i(t) = \begin{cases} \underbrace{\int\limits_0^t \int\limits_0^{t_i} \cdots \int\limits_0^{t_2}}_{i} \left(\int\limits_{t_1}^{T} \varphi(\tau)d\tau \right) dt_1 \ldots dt_i & \text{при } 0 \leq t \leq 2T, \\ 0 & \text{при } t \notin [0,2T]. \end{cases}$$

Подавая на вход устройства функцию $\varphi_i(t)$, имеем

$$f_i(t)=q_n\underbrace{\int_0^t\int_0^{t_i}\dots\int_0^{t_2}}_{i}\varphi(t_1)dt_1\dots dt_i+q_{n-1}\underbrace{\int_0^t\int_0^{t_{i-1}}\dots\int_0^{t_2}}_{i-1}\varphi(t_1)dt_1\dots dt_i+\cdots$$

$$\cdots+q_{n-i}\varphi(t)+q_{n-i-1}\varphi'(t)+\cdots+\varphi^{(n-i)}(t). \qquad (4.1.22)$$

При подаче на вход устройства функции $\overline{\varphi}_i(t)$ имеем

$$\overline{f}_i(t)=q_n\overline{\varphi}_i(t)+q_{n-1}\underbrace{\int_0^t\int_0^{t_{i-1}}\dots\int_0^{t_2}}_{i-1}\left(\int_{t_1}^T\varphi(\tau)d\tau\right)dt_1\dots dt_{i-1}+\cdots$$

$$\cdots+q_{n-i}\int_t^T\varphi(\tau)d\tau=q_{n-i-1}\varphi(t)-\cdots-\varphi^{(n-i+1)}(t). \qquad (4.1.23)$$

Интегрируя выражение (4.1.22) и результат интегрирования почленно складывая с (4.1.23), имеем при $t\geq T$

$$q_{n-i}=\frac{\int_0^t f_i(\tau)d\tau+\overline{f}_i(t)-q_n\left(\int_0^t\varphi_i(t)dt+\overline{\varphi}_i(t)\right)}{\int_0^{2T}\varphi(\tau)d\tau}-$$

$$-\frac{q_{n-1}\left(\varphi_i(t)+\underbrace{\int_0^t\int_0^{t_{i-1}}\dots\int_0^{t_2}}_{i-1}\left(\int_{t_1}^T\varphi(\tau)d\tau\right)dt_1\dots dt_i\right)}{\int_0^{2T}\varphi(\tau)d\tau}-\dots$$

$$\dots-\frac{q_{n-i+1}\left(\int_0^t\int_0^t\varphi(\tau)d\tau dt+\int_0^t\int_t^T\varphi(\tau)d\tau dt\right)}{\int_0^{2T}\varphi(\tau)d\tau},$$

где $i=1,2,\dots,n$.

Во многих случаях этот алгоритм более предпочтителен, нежели изложенный в предыдущем пункте, так как для его реализации не нужна входная функция специальной конструкции.

Пусть теперь устройство описывается дифференциальным уравнением

$$Ky \equiv y^{(n)}(t) + q_1(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + q_n(t)y(t) = f(t) \qquad (4.1.24)$$

с непрерывными функциями $q_1(t), \ldots, q_n(t)$.

Ставится задача определения коэффициентов $q_1(t), \ldots, q_n(t)$ на сегменте $[0, T]$.

Разобьем сегмент $\Delta = [0, T]$ на сегменты $\Delta_k = [t_k, t_{k+1}]$ точками $t_k = kT/N$. Функции $q_k(t)$ апроксимируем кусочно-постоянными функциями $\overline{q}_{kl}$, равными константам q_{kl} на промежутках $[t_l, t_{l+1})$. Пусть вычисляются константы $q_{kl}, k = 1, \ldots, n$. В качестве входного сигнала возьмем

$$y_l(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-\tau)^{n-1} \varphi_l(\tau) d\tau,$$

$$\varphi_l(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \in [t_l, t_{l+1}], \\ 0 & \text{при } t \notin [t_l, t_{l+1}] \end{cases}$$

и в интервале $[t_l, t_{l+1}]$ повторим рассуждения, проведенные ранее для сегмента $[0, T]$. В результате последовательно вычисляем значения коэффициентов уравнения (4.1.24): $q_i(t), i = 1, 2, \ldots, n$, на сегментах Δ_k, $k = 1, 2, \ldots, N-1$.

Рассмотрим еще один способ определения коэффициентов дифференциальных уравнений вида

$$\frac{d^n f(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1} f(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{df(t)}{dt} + a_0 f(t) = x(t) \qquad (4.1.25)$$

с начальными условиями

$$f^{(k)}(0) = 0, k = 0, 1, \ldots, n-1, \qquad (4.1.26)$$

где $x(t)$ – входной, а $f(t)$ – выходной сигналы.

Будем считать, что функции $x(t)$ и $f(t)$ финитны. Для определенности положим, что сегмент $[0, T]$ является областью определения функций $x(t)$ и $f(t)$.

Проинтегрируем уравнение (4.1.25) в пределах от 0 до T. Учитывая финитность входного и выходного сигналов (в противном случае нужно интегрировать в пределах от нуля до бесконечности), имеем

$$a_0 \int_0^T f(\tau) d\tau = \int_0^T x(\tau) d\tau,$$

отсюда имеем

$$a_0 = \frac{\int\limits_0^T x(\tau)d\tau}{\int\limits_0^T f(\tau)d\tau}.$$

Проинтегрируем уравнение (4.1.25) в пределах от 0 до t, тогда

$$f^{(n-1)}(t)+a_{n-1}f^{(n-2)}(t)+\ldots+a_1f(t)+a_0\int\limits_0^t f(\tau)d\tau= \\ =\int\limits_0^t x(\tau)d\tau. \tag{4.1.27}$$

Покажем, что если $f(t)$ – решение задачи Коши (4.1.25)–(4.1.26), то функция $f_1(t)=\int\limits_0^t f(\tau)d\tau$ является решением задачи Коши

$$f^{(n)}(t)+a_{n-1}f^{(n-1)}(t)+\cdots+a_1f^{(1)}(t)+a_0f(t)=\int\limits_0^t x(\tau)d\tau, \tag{4.1.28}$$

$$f^{(k)}(0)=0, k=0,1,\ldots,n-1. \tag{4.1.29}$$

В самом деле, функция $f_1(t)$ удовлетворяет данным Коши (4.1.29) и, подставляя ее в уравнение (4.1.28), получаем тождество

$$f_1^{(n-1)}(t)+a_{n-1}f^{(n-2)}(t)+\cdots+a_1f(t)+a_0\int\limits_0^t f(\tau)d\tau=\int\limits_0^t x(\tau)d\tau,$$

совпадающиее с (4.1.27).

Интегрируя (4.1.27) в пределах от 0 до T, имеем

$$a_1\int\limits_0^T f(\tau)d\tau=\int\limits_0^T\int\limits_0^t x(\tau)d\tau dt-a_0\int\limits_0^T\int\limits_0^t f(\tau)d\tau dt,$$

следовательно,

$$a_1=\frac{\int\limits_0^T\int\limits_0^t x(\tau)d\tau dt-a_0\int\limits_0^T\int\limits_0^t f(\tau)d\tau}{\int\limits_0^T f(\tau)d\tau}dt.$$

Продолжая этот процесс по индукции, имеем

$$a_k = \frac{\int\limits_0^T \int\limits_0^t \dots \int\limits_0^t x(\tau)d\tau dt \dots dt - a_{k-1} \int\limits_0^T \int\limits_0^t f(\tau)d\tau dt}{\int\limits_0^T f(\tau)d\tau} -$$

$$- \frac{a_{k-2} \int\limits_0^T \int\limits_0^t \dots \int\limits_0^t f(\tau)d\tau dt \dots dt - \dots - a_0 \int\limits_0^T \int\limits_0^t \dots \int\limits_0^t f(\tau)d\tau dt \dots dt}{\int\limits_0^T f(\tau)d\tau},$$

$k = 1, 2, \dots, n-1$.

Таким образом, располагая информацией о входном и выходном сигналах при условии, что $\int\limits_0^T f(\tau)d\tau = A,\ 0 < A < \infty$, последовательно вычисляем коэффициенты дифференциального уравнения (4.1.25).

Рассмотрим теперь задачу определения коэффициентов дифференциального уравнения:

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}x(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1\frac{dx(t)}{dt} + a_0 x(t) = f(t), \qquad (4.1.30)$$

где $x(t)$ – входной, а $f(t)$ – выходной сигналы.

Будем считать, что $x(t)$ и $f(t)$ – финитные функции с носителем $[0, T]$ (в противном случае интегрирование нужно проводить в пределах от нуля до бесконечности).

Кроме того, будем считать, что

$$x^{(k)}(0) = 0 \qquad (4.1.31)$$

при $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ и что $\int\limits_0^T x(\tau)d\tau \neq 0$.

Проинтегровав равенство (4.1.30) в пределах от 0 до T, имеем

$$a_0 = \frac{\int\limits_0^T f(\tau)d\tau}{\int\limits_0^T x(\tau)d\tau}.$$

При условии (4.1.31) операции дифференцирования и интегрирования в пределах от 0 до t коммутативны, то нетрудно видеть,

что если функция $x(t)$ удовлетворяет задаче Коши (4.1.30) – (4.1.31), то функция $x_1(t) = \int\limits_0^t x(\tau)d\tau$ тоже удовлетворяет задаче Коши

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{dx}{dt} + a_0 x = \int\limits_0^t f(\tau)d\tau, \tag{4.1.32}$$

$$x^{(k)}(0) = 0,\ k = 0, 1, 2, \ldots, n-1. \tag{4.1.33}$$

Интегрируя равенство (4.1.32) в пределах от 0 до t, имеем

$$a_1 = \frac{\int\limits_0^T \int\limits_0^t f(\tau)d\tau dt - a_0 \int\limits_0^T \int\limits_0^t x(\tau)d\tau dt}{\int\limits_0^T x(\tau)d\tau}.$$

Продолжая этот процесс по индукции, приходим к формуле

$$a_k = \frac{1}{\int\limits_0^T x(\tau)d\tau}\left(\int\limits_0^T \int\limits_0^t \ldots \int\limits_0^t f(\tau)d\tau dt \ldots dt - a_{k-1}\int\limits_0^T \int\limits_0^t x(\tau)d\tau dt - \ldots \right.$$
$$\left. \cdots - a_0 \int\limits_0^T \int\limits_0^t \ldots \int\limits_0^t x(\tau)d\tau dt \ldots dt\right),$$

$k = 1, 2, \ldots, n-1$.

Рассмотрим теперь дифференциальный оператор общего вида

$$Lx \equiv \frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}x(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{dx(t)}{dt} + x(t) =$$

$$= \mu f(t) \equiv b_0 f(t) + b_1\frac{df(t)}{dt} + \cdots + b_{m-1}\frac{d^{m-1}f(t)}{dt^{m-1}} + b_m\frac{d^m f(t)}{dt^m} \tag{4.1.34}$$

с начальными значениями

$$f^{(k)}(0) = 0,\ k = 0, 1, 2, \ldots, m-1. \tag{4.1.35}$$

Для нахождения коэффициентов $\{a_k\}$ и $\{b_k\}$ будем использовать две входные функции $x_1(t)$ и $x_2(t)$, на которые накладываются условия

$$x_i^{(k)}(0) = 0,\ k = 0, 1, 2, \ldots, n-1;\ i = 1, 2. \tag{4.1.36}$$

Кроме того, будем считать, что функции $x_i(t)$ $(i = 1, 2)$ и соответствующие им выходные функции $f_i(t), i = 1, 2$, финитны с носителем $[0, T]$ (в противном случае интегрирование будем проводить в пределах от нуля до бесконечности).

Проинтегрируем дифференциальный оператор (4.1.34) в пределах от 0 до T. Учитывая (4.1.35) и (4.1.36), имеем

$$b_0 = \frac{\int\limits_0^T x_1(\tau)d\tau}{\int\limits_0^T f_1(\tau)d\tau}.$$

Здесь и ниже предполагаем, что

$$\int\limits_0^T f_i(\tau)d\tau \neq 0, i = 1, 2.$$

Проинтегрируем равенство (4.1.34) в пределах от 0 до t. Учитывая соотношения (4.1.35) и (4.1.36), имеем

$$a_1 x_1(t) + \int\limits_0^t x_1(\tau)d\tau + \cdots + x_1^{(n-1)}(t) =$$

$$= b_0 \int\limits_0^t f_1(\tau)d\tau + b_1 f_1(t) + \cdots + b_m f_1^{(m-1)}(t), \tag{4.1.37}$$

$$a_1 x_2(t) + \int\limits_0^t x_2(\tau)d\tau + \cdots + x_2^{(n-1)}(t) =$$

$$= b_0 \int\limits_0^t f_1(\tau)d\tau + b_1 f_2(t) + \cdots + b_m f_2^{(m-1)}(t). \tag{4.1.38}$$

Проинтегрируем уравнения (4.1.37) и (4.1.38) в пределах от 0 до T. В результате получаем систему

$$\begin{cases} a_1 \int\limits_0^T x_1(\tau)d\tau - b_1 \int\limits_0^T f_1(\tau)d\tau = \\ = b_0 \int\limits_0^T \int\limits_0^t f_1(\tau)d\tau dt - \int\limits_0^T \int\limits_0^t x_1(\tau)d\tau dt, \\ a_1 \int\limits_0^T x_2(\tau)d\tau - b_1 \int\limits_0^T f_2(\tau)d\tau = \\ = b_0 \int\limits_0^T \int\limits_0^t f_1(\tau)d\tau dt - \int\limits_0^T \int\limits_0^t x_2(\tau)d\tau dt. \end{cases} \tag{4.1.39}$$

Если определитель

$$\begin{vmatrix} \int\limits_0^T x_1(\tau)d\tau & \int\limits_0^T f_1(\tau)d\tau \\ \int\limits_0^T x_2(\tau)d\tau & \int\limits_0^T f_2(\tau)d\tau \end{vmatrix} \neq 0,$$

то из системы уравнений (4.1.39) однозначно определяются коэффициенты a_1 и b_1.

Продолжая этот процесс по индукции, приходим к системе

$$a_k \int\limits_0^T x_1(\tau)d\tau - b_k \int\limits_0^T f_1(\tau)d\tau = b_0 \int\limits_0^T \underbrace{\int\limits_0^t \dots \int\limits_0^t}_{k} f_1(\tau)d\tau dt \dots dt +$$

$$+ b_1 \int\limits_0^T \underbrace{\int\limits_0^t \dots \int\limits_0^t}_{k-1} f_1(\tau)d\tau dt \dots dt + b_{k-1} \int\limits_0^T \int\limits_0^t f_1(\tau)d\tau dt -$$

$$- \int\limits_0^T \int\limits_0^t \dots \int\limits_0^t x_1(\tau)d\tau dt \dots dt - a_{k-1} \int\limits_0^T \int\limits_0^t x_1(\tau)d\tau dt,$$

$$a_k \int\limits_0^T x_2(\tau)d\tau - b_k \int\limits_0^T f_2(\tau)d\tau = b_0 \int\limits_0^T \underbrace{\int\limits_0^t \dots \int\limits_0^t}_{k} f_2(\tau)d\tau dt \dots dt +$$

$$+ b_1 \int\limits_0^T \underbrace{\int\limits_0^t \dots \int\limits_0^t}_{k-1} f_2(\tau)d\tau dt \dots dt + \dots + b_{k-1} \int\limits_0^T \int\limits_0^t f_2(\tau)d\tau dt -$$

$$- \int\limits_0^T \int\limits_0^t \dots \int\limits_0^t x_2(\tau)d\tau dt \dots dt - a_{k-1} \int\limits_0^T \int\limits_0^t x_2(\tau)d\tau dt,$$

$$k = 1, 2, \dots, n-1.$$

В случае, если определитель

$$\begin{vmatrix} \int\limits_0^T x_1(\tau)d\tau & \int\limits_0^T f_1(\tau)d\tau \\ \int\limits_0^T x_2(\tau)d\tau & \int\limits_0^T f_2(\tau)d\tau \end{vmatrix}$$

отличен от нуля, то коэффициенты a_k, b_k определяются однозначно.

4.1.2. Системы дифференциальных уравнениий с запаздыванием

В этом разделе рассмотрено применение описанного выше метода тестовых сигналов для определения параметров запаздывания в одном из видов линейных систем.

Рассмотрим динамическую систему, функционирование которой описывается системой дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = a_{i1}x_1(t-\alpha_{i1}) + \cdots + a_{in}x_n(t-\alpha_{in}) + f_i, \qquad (4.1.40)$$

$i = 1, 2, \ldots, n$, где $x = (x_1, \ldots, x_n)$– входной, а $f = (f_1, \ldots, f_n)$– выходной сигналы; a_{ik}– вещественные коэффициенты, составляющие матрицу $A = \{a_{ik}\}_{i,k=\overline{1,n}}$; α_{ik}– запаздывания, $\alpha_{ik} \geq 0$, $i, k = \overline{1,n}$.

Поставим задачу определить элементы матрицы A и запаздываний α_{ik} по тестовым сигналам. При $\alpha_{ik} = 0$, $i, k - \overline{1,n}$, эта задача изучалась в [14, 42, 71]. Ниже метод [42] распространим на уравнение (4.1.40).

Пусть $\varphi(t)$ – финитная функция с носителем $[0, T]$, причем $\varphi(0) = 0$ и существует такое $0 \leq b < T$, что в интервале $(0, b)$ $\varphi(t) \neq 0$. Обозначим через $\bar{\varphi}(t)$ функцию

$$\bar{\varphi}(t) = \int\limits_t^T \varphi(\tau)d\tau = \int\limits_t^\infty \varphi(\tau)d\tau.$$

Через $f^i(t) = [f_1^i(t), \ldots, f_n^i(t)]$, $\bar{f}^i(t) = (\bar{f}_i(t), \ldots, \bar{f}_n^i)$ обозначим реакцию устройства, описываемого (4.1.40), на входные воздействия

$$x^i(t) = (0, \ldots, 0, \varphi(t), 0, \ldots, 0),\ \bar{x}^i(t) = (0, \ldots, 0, \bar{\varphi}(t), 0, \ldots, 0),$$

где отличны от нуля только i-е компоненты.

Подадим на вход системы (4.1.40) тестовый сигнал $x^i(t)$ и применим к уравнению (4.1.40) преобразование Лапласа. В результате получаем систему уравнений

$$pX^i(p) = B(p)X^i(p) + F^i(p), \qquad (4.1.41)$$

где $B(p) = \{b_{ik}(p)\}_{i,k-\overline{1,n}}$, $b_{ik}(p) = e^{-\alpha_{ik}p}a_{ik}$, $X(p)$, $F(p)$ – преобразование Лапласа функций $x(t)$, $f(t)$.

Аналогично, подавая на вход системы (4.1.40) тестовый сигнал $\bar{x}^i(t)$ и применяя преобразование Лапласа, имеем

$$-X^i(p) = B(p)\left(\int\limits_0^T x^i(v)dv\right) - B(p)X^i(p)p^{-1} + \bar{F}^i(p). \qquad (4.1.42)$$

Разделим уравнение (4.1.41) на p и сложим с (4.1.42), тогда

$$B(p)\left(\int_0^T x^i(v)dv\right) = -(\bar{F}^i(p) + p^{-1}F^i(p)),$$

отсюда

$$b_{ki}(p) = -(\bar{f}_k^i(p) + p^{-1}f_k^i(p))/\left(\int_0^T x^i(v)dv\right).$$

Применяя к этому равенству обратное преобразование Лапласа, получаем

$$a_{ki}u(t-\alpha_{ik}) = -\frac{\bar{f}_k^i(t) + \int\limits_0^t f_k(\tau)d\tau}{\int\limits_0^T \varphi(v)dv}, \qquad (4.1.43)$$

$i,k = 1,2,\ldots,n$, где $u(t) = 1$ при $t > 0$ и $u(t) = 0$ при $t < 0$.

Анализируя равенство (4.1.43), убеждаемся, что при $0 \le t \le \alpha_{ik}$ правая часть (4.1.43) должна быть равна 0. Тогда, интервал времени, начинающийся с $t=0$, в течение которого $\bar{f}_k^i(t) + \int\limits_0^t f_k^i(\tau)d\tau = 0$, определяет величину задержки α_{ki}, $k,i = \overline{1,n}$.

Следовательно, располагая информацией о реакции системы (4.1.40) на $2n$ тестовых сигналов, определяем по формуле (4.1.43) n^2 коэффициентов a_{ki} и n^2 запаздываний α_{ki}.

Пример 4.1.4. Рассмотрим устройство, описываемое системой дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{array}{l} x_1'(t) = x_1(t-0,5) - x_2(t-0,2); \\ x_2'(t) = 2x_2(t-0,3) + 3x_2(t-0,4). \end{array}\right\} \qquad (4.1.44)$$

Требуется определить элементы $a_{11} = 1$, $a_{12} = -1$, $a_{21} = 2$, $a_{22} = 3$ матрицы $A = \{a_{ik}\}$, $i,k = 1,2$ и величины запаздываний $\alpha_{11} = 0,5$, $\alpha_{12} = 0,2$, $\alpha_{21} = 0,3$, $\alpha_{22} = 0,4$.

Решение. Пусть

$$\varphi(t) = \begin{cases} t \text{ при } t \in [0,T], \\ 0 \text{ при } t \notin [0,T], \end{cases}$$

$$\psi(t) = \begin{cases} \frac{T^2}{2} - \frac{t^2}{2} \text{ при } t \in [0,T], \\ 0 \text{ при } t \notin [0,T]. \end{cases}$$

Подадим на вход системы (4.1.44) сигналы

$$x^1(t) = \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x^2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi(t) \end{pmatrix},$$

$$\bar{x}^1(t) = \begin{pmatrix} \psi(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{x}^2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi(t) \end{pmatrix}.$$

Соответствующие выходные сигналы равны при $0 \le t \le T$:

$$f_1^1(t) = \begin{cases} 1 \text{ при } 0 \le t \le 0,5, \\ 1 - t + 0,5 \text{ при } 0,5 \le t \le T, \end{cases}$$

$$f_2^1(t) = \begin{cases} 0 \text{ при } 0 \le t \le 0,3, \\ -2t + 0,6 \text{ при } 0,3 \le t \le T, \end{cases}$$

$$f_1^2(t) = \begin{cases} 0 \text{ при } 0 \le t \le 0,2, \\ t - 0,2 \text{ при } 0,2 \le t \le T, \end{cases}$$

$$f_2^2(t) = \begin{cases} 1 \text{ при } 0 \le t \le 0,4, \\ 2,2 - 3t \text{ при } 0,4 \le t \le T, \end{cases}$$

$$\bar{f}_1^1(t) = \begin{cases} -t \text{ при } 0 \le t \le 0,5, \\ -t - \frac{T^2}{2} + \frac{(t-0,5)^2}{2} \text{ при } 0,5 \le t \le T, \end{cases}$$

$$\bar{f}_2^1(t) = \begin{cases} 0 \text{ при } 0 \le t \le 0,3, \\ -2\left(\frac{T^2}{2} - \frac{(t-0,3)^2}{2}\right) \text{ при } 0,3 \le t \le T, \end{cases}$$

$$\bar{f}_1^2(t) = \begin{cases} 0 \text{ при } 0 \le t \le 0,2, \\ \frac{T^2}{2} - \frac{(t-0,2)^2}{2} \text{ при } 0,2 \le t \le T, \end{cases}$$

$$\bar{f}_2^2(t) = \begin{cases} -t \text{ при } 0 \le t \le 0,4, \\ -t - 3\left(\frac{T^2}{2} - \frac{(t-0,4)^2}{2}\right) \text{ при } 0,4 \le t \le T. \end{cases}$$

Воспользовавшись формулами (4.1.43), находим значения a_{ik} и α_{ik}, $i, k = \overline{1, n}$, которые совпадают с точными значениями коэффициентов и запаздываний системы (4.1.44).

4.1.3. Восстановление параметров линейных систем, описываемых дифференциальными уравнениями с переменными коэффициентами[1]

Линейные системы с переменными параметрами, на входе которых действует сигнал $x(t)$, а на выходе сигнал $y(t)$, моделируются обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$a_n(t)\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1}(t)\frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + ... + a_0(t)y(t) = x(t), \qquad (4.1.45)$$

где $a_n(t), a_{n-1}(t), ..., a_0(t)$ – коэффициенты.

Большой класс задач идентификации связан с определением коэффициентов дифференциального уравнения (4.1.45). Этому посвящен ряд работ [53, 71, 138]. Особенно хорошо изучены методы определения постоянных и медленно меняющихся коэффициентов.

Несколько достаточно общих методов определения параметров дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами описано в разд. 4.1.1.

Общие методы определения переменных параметров $a_0(t)$, ..., $a_{n-1}(t)$, $a_n(t)$ системы по известной импульсной переходной функции $h(t, \tau)$ авторам неизвестны. Ниже предложен достаточно общий метод определения параметров $a_0(t)$, ..., $a_{n-1}(t)$, $a_n(t)$ измерительной системы (ИС), описываемой уравнением (4.1.45), по известной импульсной переходной функции.

Для систем, описываемых дифференциальными уравнениями вида (4.1.45) с переменными параметрами, импульсная переходная функция определяется как [138]:

$$\int_0^t h(t, \tau)x(\tau)d\tau = y(t), \qquad (4.1.46)$$

а для систем с постоянными параметрами – как

$$\int_0^t h(t - \tau)x(\tau)d\tau = y(t). \qquad (4.1.47)$$

Будем полагать, что уравнения (4.1.46), (4.1.47) однозначно разрешимы. Это условие выполнимо для широкого класса уравнений Вольтерра (см. например [52]), если функции $h(t)$ и $h(t, \tau)$ дифференцируемы по переменной t.

[1]Раздел написан по материалам работы [28].

Методы восстановления импульсной переходной функции для систем (4.1.46) с переменными параметрами рассмотрены в [25, 26], для систем (4.1.47) с постоянными параметрами – в [14, 71, 138] и подробно изложены в гл. 2

Постановка задачи. Дана импульсная переходная функция $h(t,\tau)$ измерительного преобразователя (4.1.45). Требуется найти коэффициенты $a_n(t), a_{n-1}(t), ..., a_0(t)$ уравнения (4.1.45).

Решение. Определим (аналитическим или численным методом) по заданной функции $h(t,\tau)$ измерительного преобразователя (4.1.45) входные сигналы $x_1(t)$, $x_2(t), ..., x_{n+1}(t)$ такие, чтобы им в качестве выходных сигналов соответствовала система линейно независимых функций

$$\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_{n+1}(t). \tag{4.1.48}$$

Условие линейной независимости системы функций (4.1.48) заключается в отличии от нуля вронскиана

$$W\left(\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_{n+1}(t)\right) = \\ = \begin{vmatrix} \varphi_1^{(n)}(t) & \varphi_1^{(n-1)}(t) & \cdots & \varphi_1'(t) & \varphi_1(t) \\ \varphi_2^{(n)}(t) & \varphi_2^{(n-1)}(t) & \cdots & \varphi_2'(t) & \varphi_2(t) \\ & & \cdots & & \\ \varphi_{n+1}^{(n)}(t) & \varphi_{n+1}^{(n-1)}(t) & \cdots & \varphi_{n+1}'(t) & \varphi_{n+1}(t) \end{vmatrix} \neq 0. \tag{4.1.49}$$

Определим искомые входные сигналы $x_1(t), x_2(t), ..., x_{n+1}(t)$ из решения интегральных уравнений

$$\begin{cases} \int\limits_0^t h(t,\tau)x_1(\tau)d\tau = \varphi_1(t), \\ \qquad\qquad ... \\ \int\limits_0^t h(t,\tau)x_{n+1}(\tau)d\tau = \varphi_{n+1}(t). \end{cases} \tag{4.1.50}$$

Отметим, что каждое из уравнений в (4.1.50) есть интегральное уравнение Вольтерра I рода. Для их решения разработано много численных и аналитических методов [52, 171]. Подробная библиография методов решения интегральных уравнений и программы реализации некоторых численных методов содержатся в [52].

Решая систему (4.1.50), находим для каждого выходного виртуального сигнала $\varphi_i(t), i = 1, 2, \ldots, n+1$, соответствующий входной сигнал $x_i(t)$, $i = 1, 2, ..., n+1$.

Подставляя $\varphi_i(t)$ и $x_i(t)$, $i = 1, 2, ..., n+1$, в (4.1.45), приходим к системе уравнений относительно $a_i(t), i = 1, 2, ..., n+1$,

$$\begin{cases} a_n(t)\varphi_{n+1}^{(n)}(t)+a_{n-1}(t)\varphi_{n+1}^{(n-1)}(t)+...+a_0\varphi_{n+1}(t)=x_{n+1}(t); \\ a_n(t)\varphi_n^{(n)}(t)+a_{n-1}(t)\varphi_n^{(n-1)}(t)+...+a_0\varphi_n(t)=x_n(t); \\ \cdots \\ a_n(t)\varphi_1^{(n)}(t)+a_{n-1}(t)\varphi_1^{(n-1)}(t)+...+a_0\varphi_1(t)=x_1(t); \end{cases} \tag{4.1.51}$$

Так как определитель Вронского (4.1.49) системы линейных алгебраических уравнений (4.1.51) отличен от нуля, то решение системы (4.1.51) будет однозначным и имеет вид:

$$a_0(t) = \frac{\begin{vmatrix} \varphi_1^{(n)}(t) & \varphi_1^{(n-1)}(t) & \cdots & \varphi_1'(t) & x_1(t) \\ \varphi_2^{(n)}(t) & \varphi_2^{(n-1)}(t) & \cdots & \varphi_2'(t) & x_2(t) \\ & & \cdots & & \\ \varphi_{n+1}^{(n)}(t) & \varphi_{n+1}^{(n-1)}(t) & \cdots & \varphi_{n+1}'(t) & x_{n+1}(t) \end{vmatrix}}{W(\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_{n+1}(t))},$$

$$a_1(t) = \frac{\begin{vmatrix} \varphi_1^{(n)}(t) & \varphi_1^{(n-1)}(t) & \cdots & x_1(t) & \varphi_1(t) \\ \varphi_2^{(n)}(t) & \varphi_2^{(n-1)}(t) & \cdots & x_2(t) & \varphi_2(t) \\ & & \cdots & & \\ \varphi_{n+1}^{(n)}(t) & \varphi_{n+1}^{(n-1)}(t) & \cdots & x_{n+1}(t) & \varphi_{n+1}(t) \end{vmatrix}}{W(\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_{n+1}(t))},$$

$$\cdots$$

$$a_n(t) = \frac{\begin{vmatrix} x_1(t) & \varphi_1^{(n-1)}(t) & \cdots & \varphi_1'(t) & \varphi_1(t) \\ x_2(t) & \varphi_2^{(n-1)}(t) & \cdots & \varphi_2'(t) & \varphi_2(t) \\ & & \cdots & & \\ x_{n+1}(t) & \varphi_{n+1}^{(n-1)}(t) & \cdots & \varphi_{n+1}'(t) & \varphi_{n+1}(t) \end{vmatrix}}{W(\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_{n+1}(t))}. \tag{4.1.52}$$

Рассмотрим случай, когда в качестве линейно независимых функций (4.1.48) выступают функции

$$y_1(t) = 1(t),\ y_2(t) = t, ..., y_{n+1}(t) = t^n. \tag{4.1.53}$$

Отметим, что определитель Вронского $W(y_1(t),\ldots,y_{n+1}(t))$ системы функций (4.1.53) отличен от нуля. Поставим набору функций (4.1.53) в соответствие систему интегральных уравнений

$$\begin{cases} \int\limits_0^t h(t,\tau)x_1(\tau)d\tau = 1(t), \\ \qquad\qquad ... \\ \int\limits_0^t h(t,\tau)x_{k+1}(\tau)d\tau = t^k, \end{cases} \tag{4.1.54}$$

$k = 1, 2, ..., n$, из которых определим входные сигналы $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_{n+1}(t)$.

Решая систему (4.1.54), получаем для каждого выходного сигнала $y_i(t)$ соответствующий входной сигнал $x_i(t)$, $i = 1, 2, ..., n+1$. Подставляя $y_i(t)$ и $x_i(t)$, $i = 1, 2, ..., n+1$, в (4.1.45), приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} a_n(t)\delta^{(n-1)}(t) + a_{n-1}(t)\delta^{(n-2)}(t) + ... + a_0(t) = x_1(t); \\ a_n(t)\delta^{(n-2)}(t) + a_{n-1}(t)\delta^{(n-3)}(t) + ... + a_0(t)t = x_2(t); \\ \qquad\qquad ... \\ n!a_n(t) + n(n-1)\cdot...\cdot 2a_{n-1}(t)t + ... + a_0(t)t^n = x_{n+1}(t), \end{cases} \tag{4.1.55}$$

где $\delta(t)$ – дельта-функция Дирака.

Напомним [60], что

$$\frac{d}{dt}1(t) = \delta(t), \frac{d^2}{dt^2}1(t) = \delta'(t), \ldots, \frac{d^n}{dt^n}1(t) = \delta^{(n-1)}(t).$$

Рассматривая $\delta(t)$ и ее производные при $t > 0$, получим

$$\delta(t) = \delta'(t) = ... = \delta^{(n-1)}(t) = 0, t > 0.$$

Тогда при $t > 0$ система уравнений (4.1.55) примет вид

$$\begin{cases} a_0(t) = x_1(t); \\ a_1(t) = x_2(t) - a_0(t)t; \\ ...; \\ a_n(t) = \frac{1}{n!}\left(x_{n+1}(t) - n\left(n-1\right)...\cdot 2a_{n-1}(t)t - ... - a_0(t)t^n\right). \end{cases} \tag{4.1.56}$$

Таким образом, располагая функцией $h(t,\tau)$, вычисляем коэффициенты уравнения (4.1.45).

Достоинство данного метода состоит в том, что для определения $a_n(t)$, $a_{n-1}(t)$, ..., $a_0(t)$ не требуется подавать входные сигналы и фиксировать отклик системы на эти воздействия. Достаточно знать импульсную переходную функцию системы.

Проиллюстрируем метод несколькими примерами.

Пример 4.1.5. Рассмотрим измерительный преобразователь, функционирование которого описывается дифференциальным уравнением с переменными коэффициентами:

$$t\frac{dy}{dt} + (1+2t)y = x(t). \tag{4.1.57}$$

Требуется определить ИПФ системы (4.1.57).

Отметим, что импульсная переходная функция такого преобразователя имеет вид $h(t,\tau) = t^{-1}e^{-2(t-\tau)}, \tau \le t$.

Решение. Определим виртуальные входные сигналы $x_1(t),\ x_2(t)$, которым соответствуют выходные сигналы

$$y_1(t) = \begin{cases} 1(t),\ t > 0, \\ 0,\ t \le 0, \end{cases}$$

$$y_2(t) = \begin{cases} t,\ t > 0, \\ 0,\ t \le 0. \end{cases}$$

Искомые входные сигналы $x_1(t),\ x_2(t)$ получим из решения интегральных уравнений

$$\begin{cases} y_1(t) = \int\limits_0^t \frac{1}{t}\mathrm{e}^{-2(t-\tau)}x_1(\tau)d\tau, \\ y_2(t) = \int\limits_0^t \frac{1}{t}\mathrm{e}^{-2(t-\tau)}x_2(\tau)d\tau, \end{cases}$$

которые в данном случае преобразуются в систему уравнений в свертках

$$\begin{cases} t = \int\limits_0^t \mathrm{e}^{-2(t-\tau)}x_1(\tau)d\tau, \\ t^2 = \int\limits_0^t \mathrm{e}^{-2(t-\tau)}x_2(\tau)d\tau. \end{cases}$$

Решая ее операционным методом, приходим к системе алгебраических уравнений относительно изображений искомых функций $X_1(p), X_2(p)$:

$$\begin{cases} \dfrac{X_1(p)}{p+2} = \dfrac{1}{p^2}; \\ \dfrac{X_2(p)}{p+2} = \dfrac{2}{p^3}. \end{cases}$$

Решением данной системы являются функции

$$\begin{cases} X_1(p) = \dfrac{1}{p} + \dfrac{2}{p^2}, \\ X_2(p) = \dfrac{2}{p^2} + \dfrac{4}{p^3}, \end{cases}$$

их оригиналы:

$$\begin{cases} x_1(t) = 1 + 2t, \\ x_2(t) = 2t + 2t^2. \end{cases}$$

Искомые коэффициенты уравнения (4.1.57) найдем из системы (4.1.56): $a_0(t) = 1 + 2t$, $a_1(t) = t$. Очевидно, что они в точности совпадают с коэффициентами уравнения (4.1.57).

Пример 4.1.6. Рассмотрим измерительный преобразователь, функционирование которого описывается дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y = x(t). \tag{4.1.58}$$

Предположим, что импульсная переходная функция $h(t, \tau)$ неизвестна, а также, что заранее неизвестно, является преобразователь стационарным или динамическим. Поэтому импульсную переходную функцию будем искать, рассматривая самый общий случай динамической системы с переменными параметрами, т.е. используя метод, описанный в разд. 2.5.

Решение. В качестве входных сигналов возьмем

$$\begin{cases} \hat{x}_1(t) = 6\mathrm{e}^t - 2t - 5, \quad t \geq 0, \\ \hat{x}_2(t) = \mathrm{e}^t - 4t - 8, \quad t \geq 0. \end{cases} \tag{4.1.59}$$

Тогда выходные сигналы преобразователя (4.1.58) будут иметь вид

$$\begin{cases} \hat{y}_1(t) = \mathrm{e}^t - t - 1; \\ \hat{y}_2(t) = \mathrm{e}^{2t} - 2t - 1, \end{cases} \tag{4.1.60}$$

причем $\hat{y}_1(0) = \hat{y}_1'(0) = 0; \hat{y}_2(0) = \hat{y}_2(0) = 0$.

Изображение импульсной переходной функции будем искать в виде $H(p, \tau) = \hat{H}(p)\mathrm{e}^{-\tau q(p)}$. Функции $\hat{H}(p)$, $q(p)$ найдем, следуя разд. 2.5, из решения системы

$$\begin{cases} \hat{H}(p)\hat{X}_1(q(p)) = \hat{Y}_1(p), \\ \hat{H}(p)\hat{X}_2(q(p)) = \hat{Y}_2(p), \end{cases} \tag{4.1.61}$$

где $\hat{X}_1(p), \hat{X}_2(p),\ \hat{Y}_1(p), \hat{Y}_2(p)$ – изображения функций $\hat{x}_1(t),\ \hat{x}_2(t),$ $\hat{y}_1(t),\ \hat{y}_2(t)$.

Из (4.1.59) и (4.1.60) имеем

$$\begin{cases} \hat{X}_1(p) = \dfrac{6}{p-1} - \dfrac{2}{p^2} - \dfrac{5}{p} = \dfrac{p^2+3p+2}{p^2(p-1)}, \\ \hat{X}_2(p) = \dfrac{12}{p-1} - \dfrac{4}{p^2} - \dfrac{8}{p} = \dfrac{4(p^2+3p+2)}{p^2(p-1)}; \end{cases} \tag{4.1.62}$$

$$\begin{cases} \hat{Y}_1(p) = \dfrac{1}{p-1} - \dfrac{1}{p^2} - \dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{p^2(p-1)}, \\ \hat{Y}_2(p) = \dfrac{1}{p-2} - \dfrac{2}{p^2} - \dfrac{2}{p} = \dfrac{4}{p^2(p-2)}. \end{cases} \tag{4.1.63}$$

Подставляя (4.1.62), (4.1.63) в (4.1.61), приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} \hat{H}(p)\dfrac{q^2(p)+3q(p)+2}{q^2(p)(q(p)-1)} = \dfrac{1}{p^2(p-1)}; \\ \hat{H}(p)\dfrac{4(q^2(p)+3q(p)+2)}{q^2(p)(q(p)-2)} = \dfrac{4}{p^2(p-2)}, \end{cases}$$

откуда

$$\frac{q(p)-1}{q(p)-2} = \frac{p-1}{p-2}.$$

Таким образом, $q(p) = p$ и $\hat{H}(p) = \frac{1}{p^2+3p+2}$. Изображением импульсной переходной функции будет функция

$$H(p,\tau) = \frac{e^{-\tau p}}{p^2+3p+2} = \frac{e^{-\tau p}}{p+1} - \frac{e^{-\tau p}}{p+2};$$

ее оригинал, по которому вычислим коэффициенты уравнения (4.1.58), равен $h(t,\tau) = \mathrm{e}^{-(t-\tau)} - \mathrm{e}^{-2(t-\tau)}$.

Выберем $x_1(t),\ x_2(t),\ x_3(t)$ так, чтобы выходные сигналы имели вид

$$y_1(t) = \begin{cases} 1(t), & t > 0; \\ 0, & t \le 0, \end{cases}$$

$$y_2(t) = \begin{cases} t, & t > 0; \\ 0, & t \le 0, \end{cases}$$

$$y_3(t) = \begin{cases} t^2, & t > 0; \\ 0, & t \le 0. \end{cases}$$

Сигналы $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ найдем из системы интегральных уравнений в свертках

$$\begin{cases} \int\limits_0^t \left(\mathrm{e}^{-(t-\tau)} - \mathrm{e}^{-2(t-\tau)}\right) x_1(\tau)d\tau = 1(t); \\ \int\limits_0^t \left(\mathrm{e}^{-(t-\tau)} - \mathrm{e}^{-2(t-\tau)}\right) x_2(\tau)d\tau = t; \\ \int\limits_0^t \left(\mathrm{e}^{-(t-\tau)} - \mathrm{e}^{-2(t-\tau)}\right) x_3(\tau)d\tau = t^2. \end{cases}$$

Решив, каждое из уравнений данной системыее, операционным методом, находим изображения $X_1(p)$, $X_2(p)$, $X_3(p)$ искомых функций $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$, которые имеют вид:

$$\begin{cases} X_1(p) = p + 3 + \dfrac{2}{p}; \\ X_2(p) = 1 + \dfrac{3}{p} + \dfrac{2}{p^2}; \\ X_3(p) = \dfrac{2}{p} + \dfrac{6}{p^2} + \dfrac{4}{p^3}, \end{cases}$$

тогда

$$\begin{cases} x_1(t) = \delta'(t) + \delta(t) + 2, \\ x_2(t) = \delta(t) + 3 + 2t, \\ x_3(t) = 2 + 6t + 2t^2. \end{cases}$$

Рассматривая полученные сигналы $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ при $t > 0$ и учитывая, что $\delta(t) = \delta'(t) = ... = \delta^{(n-1)}(t) = 0$ при $t > 0$, получаем $x_1(t) = 2$, $x_2(t) = 3 + 2t$, $x_3(t) = 2 + 6t + 2t^2$.

Из формулы (4.1.56) найдем искомые коэффициенты $a_0(t)$=2, $a_1(t) = 3$, $a_2(t) = 1$; они в точности совпадают с исходными в уравнении (4.1.58).

Замечание 4.1.1. *Если известно, что рассматривается измерительный преобразователь* (4.1.45) *с постоянными коэффициентами, то метод можно модифицировать. Найдем входной сигнал* $x(t)$ *из решения интегрального уравнения*

$$\int_0^t h(t-\tau)x(\tau)d\tau = y(t), \qquad (4.1.64)$$

в котором $y(t) = t^n$. *Так как* $\int_0^t h(t-\tau)x(\tau)d\tau = \int_0^t h(\tau)x(t-\tau)d\tau$, *то очевидно, что решением уравнения (4.1.64) будет многочлен степени не выше* n: $x(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + ... + b_n t^n$.

Из вида уравнения (4.1.45) *с постоянными коэффициентами следует, что если* $y(t)$ – *полином степени* n, *то* $x(t)$ *также полином степени не выше* n. *Тогда* (4.1.45) *примет вид*

$$n!a_n + n(n-1)...2\cdot 1 a_{n-1}t + ... + na_1 t^{n-1} + a_0 t^n = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + ... + b_n t^n,$$

отсюда, приравняв коэффициенты при одинаковых степеняx t, *получим* $a_0 = b_n$, $a_1 = \frac{b_{n-1}}{n}$, ..., $a_{n-1} = \frac{b_1}{n(n-1)...2}$, $a_n = \frac{b_0}{n!}$.

Приведем пример, учитывающий замечание. Продемонстрируем восстановление постоянных коэффициентов на примере 4.1.6. Выше было показано, что входной сигнал измерительного преобразователя (4.1.58) при $y(t) = t^2$ и $h(t) = \mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-2t}$ будет равен $x(t) = 2 + 6t + 2t^2$. Следовательно, (4.1.58) после подстановки в него $x(t)$ и $y(t)$ примет вид $2a_2 + 2a_1 t + a_0 t^2 = 2 + 6t + 2t^2$. В результате получим $a_0(t) = 2,\ a_1(t) = 3,\ a_2(t) = 1$. Таким образом, для нахождения параметров измерительного преобразователя с постоянными коэффициентами достаточно определить только один входной сигнал из решения интегрального уравнения (4.1.64) с полиномиальной правой частью.

Рассмотрим ситуацию, когда импульсная переходная функция задана с погрешностью. Интерес представляют два случая, когда ИС определена уравнениями (4.1.46) и (4.1.47). При достаточно общих предположениях о функции $h(t)$ уравнение (4.1.47) однозначно разрешимо при любой правой части. В частности, так будет, если функция $h(t)$ дифференцируема.

В общем случае импульсная переходная функция $h(t)$ реальной ИС определяется с некоторой погрешностью ε. Предположим, что $\varepsilon = \max\limits_{0\le\tau\le t\le T} \left|\tilde{h}(t) - h(t)\right|$, где $h(t)$ и $\tilde{h}(t)$ – импульсные переходные функции реальной ИС и полученной экспериментально или теоретически при использовании сигналов с погрешностями. Получим приближенные значения коэффициентов $\tilde{a}_n(t), \tilde{a}_{n-1}(t), ..., \tilde{a}_0(t)$ уравнения (4.1.45) и оценим их погрешность, для чего потребуется най-

ти погрешность определения виртуальных входных сигналов ИС. С этой целью рассмотрим точное и приближенное интегральные уравнения

$$\int_0^t h(t-\tau)x(\tau)d\tau = y(t); \int_0^t \tilde{h}(t-\tau)\tilde{x}(\tau)d\tau = y(t), \qquad (4.1.65)$$

где $h(t)$, $\tilde{h}(t)$ – импульсные переходные функции, соответственно точная и известная с погрешностью ε; $\max\limits_{0\le t\le T}\left|h(t)-\tilde{h}(t)\right| = \varepsilon$; $x(t)$, $\tilde{x}(t)$ – входные сигналы, $y(t)$ – выходной сигнал, значения которого точно известны. Пусть $h(t)$ – непрерывная функция.

Введем обозначение $\varepsilon_0 = \max\limits_{0\le t\le T}|\tilde{x}(t)-x(t)|$. Из (4.1.65) следует уравнение

$$\int_0^t h(t-\tau)\left(x(\tau)-\tilde{x}(\tau)\right)d\tau = \int_0^t \left(\tilde{h}(t-\tau)-h(t-\tau)\right)\tilde{x}(\tau)d\tau, \qquad (4.1.66)$$

которое будем исследовать в промежутке $[0,T]$.

Выше было сделано предположение о том, что уравнение

$$Kx \equiv \int_0^t h(t-\tau)x(\tau)d\tau = f(t) \qquad (4.1.67)$$

однозначно разрешимо при любой правой части. Будем рассматривать уравнение (4.1.67) в пространстве $C[0,T]$ непрерывных функций, определенных на сегменте $[0,T]$. Известно, что пространство $C[0,T]$ полное [118]. Из указанного предположения следует, что оператор K отображает пространство $C[0,T]$ на пространство $C[0,T]$. Следовательно, по теореме Банаха [118] оператор K непрерывно обратим, т.е. существует непрерывный ограниченный оператор K^{-1} с нормой $\left\|K^{-1}\right\| = C = \text{const}$. Тогда из (4.1.66) имеем

$$\begin{gathered}\varepsilon_0 = \|x(t)-\tilde{x}(t)\|_{C[0,T]} \le \\ \le \left\|K^{-1}\right\| T \max_{0\le\tau\le t\le T}\left|\tilde{h}(t-\tau)-h(t-\tau)\right| \max_{0\le t\le T}|\tilde{x}(t)| \le C_0\varepsilon, \\ C_0 = \left\|K^{-1}\right\| T \max_{0\le\tau\le t\le T}|\tilde{x}(t)|.\end{gathered} \qquad (4.1.68)$$

Использование неравенства $\varepsilon_0 \le C_0\varepsilon$ вызывает затруднения, так как в оценку константы C_0 входит соотношение $\|\tilde{x}(t)\| = \max\limits_{0\le\tau\le t\le T}|\tilde{x}(t)|$,

но реально не определяется. Поэтому усилим неравенство (4.1.68). Будем полагать значение ε достаточно малым: $T\left\|K^{-1}\right\|\varepsilon < 0,5$, и запишем

$$\varepsilon_0 \le \left\|K^{-1}\right\| T \max_{0\le\tau\le t} |\tilde{x}(t)|\,\varepsilon \le$$
$$\le \left\|K^{-1}\right\| T \left(\varepsilon \max_{0\le\tau\le t} |\tilde{x}(t)-x(t)| + \varepsilon \max_{0\le\tau\le t} |x(t)|\right) \le$$
$$\le \left\|K^{-1}\right\| T \left(\varepsilon_0\varepsilon + \left\|K^{-1}\right\| \varepsilon \max_{0\le\tau\le t} |y(t)|\right).$$

Из последнего неравенства следует

$$\varepsilon_0 \le \left(2\left\|K^{-1}\right\| \max_{0\le\tau\le t\le T} |y(t)|\right)\varepsilon = C\varepsilon, \tag{4.1.69}$$

где $C = 2\left\|K^{-1}\right\| \max\limits_{0\le\tau\le t\le T} |y(t)|$, т.е. константа C выражается через параметры ИС и выходного сигнала $y(t)$, который определяется заранее и является конкретной вещественной функцией.

Таким образом, установлена связь между погрешностями ε и $\varepsilon_0 = \max\limits_{0\le t\le T} |\tilde{x}(t)-x(t)|$. Последнюю, использовав неравенство Гельдера [118], также можно выразить в метрике пространства L_2 :

$$\max_{0\le t\le T} |x(t)-\tilde{x}(t)| \le$$
$$\le \left\|K^{-1}\right\|_{C[0,T]} \max_{0\le t\le T} \left[\int_0^t \left|\tilde{h}(t-\tau)-h(t-\tau)\right|^2 d\tau\right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_0^t |\tilde{x}(\tau)|^2\, d\tau\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{4.1.70}$$

причем эта оценка иногда может оказаться удобнее.

Теперь рассмотрим случай, когда ИС определена уравнением (4.1.46). В общем случае импульсная переходная функция $h(t,\tau)$ реальной ИС определяется с некоторой погрешностью. Предположим, что

$$\varepsilon_1 = \max_{0\le\tau\le t\le T} \left|\tilde{h}(t,\tau)-h(t,\tau)\right|, \varepsilon_2 = \max_{0\le\tau\le t\le T} \left|\frac{\partial\tilde{h}(t,\tau)}{\partial t} - \frac{\partial h(t,\tau)}{\partial t}\right|,$$

где $h(t,\tau)$ и $\tilde{h}(t,\tau)$ – импульсные переходные функции ИС соответственно реальной и полученной экспериментально или теоретически при использовании сигналов с погрешностями.

Найдем приближенные значения коэффициентов $\tilde{a}_n(t)$, $\tilde{a}_{n-1}(t)$, ..., $\tilde{a}_0(t)$ уравнения (4.1.45) и оценим возникающую при этом погрешность. Для ее оценки потребуется информация о погрешности определения входных сигналов, когда импульсная переходная функция известна с погрешностями ε_1 и ε_2. С этой целью рассмотрим интегральные уравнения

$$\int_0^t h(t,\tau)x(\tau)d\tau = y(t); \int_0^t \tilde{h}(t,\tau)\tilde{x}(\tau)d\tau = y(t), \tag{4.1.71}$$

где $h(t,\tau)$, $\tilde{h}(t,\tau)$ – импульсные переходные функции, значения которых и их производных $\frac{\partial h(t,\tau)}{\partial t}$, $\frac{\partial \tilde{h}(t,\tau)}{\partial t}$ известны соответственно точно и с погрешностями

$$\varepsilon_1 = \max_{0\le\tau\le t\le T} \left| h(t,\tau) - \tilde{h}(t,\tau) \right|,$$

$$\varepsilon_2 = \max_{0\le\tau\le t\le T} \left| \frac{\partial h(t,\tau)}{t} - \frac{\partial \tilde{h}(t,\tau)}{\partial t} \right|;$$

$x(t)$ и $\tilde{x}(t)$ – входные сигналы ИС с импульсными переходными функциями, соответственно точной и заданной с погрешностями ε_1 и ε_2; $y(t)$ – выходной сигнал системы с точно известными значениями.

Погрешность определения входных сигналов оценим как

$$\varepsilon_0 = \max_{0\le t\le T} \left| \tilde{x}(t) - x(t) \right|.$$

Из (4.1.71) следует уравнение

$$\int_0^t h(t,\tau)\left(x(\tau) - \tilde{x}(\tau)\right)d\tau = \int_0^t \left(\tilde{h}(t,\tau) - h(t,\tau)\right)\tilde{x}(\tau)d\tau, \tag{4.1.72}$$

которое будем рассматривать в промежутке $[0,T]$. Выше было сделано предположение о том, что уравнение

$$Kx \equiv \int_0^t h(t,\tau)x(\tau)d\tau = f(t)$$

разрешимо. Известно [52], что если функция $f(t)$ дифференцируема и $h(t,\tau) > 0$, то оператор K, принадлежащий пространству $C[0,T]$

непрерывных функций и действующий на пространство $C_1[0,T]$ непрерывно дифференцируемых функций, имеет ограниченный обратный оператор K^{-1}. Тогда из (4.1.72) имеем

$$\|x(t)-\tilde{x}(t)\|_{C[0,T]} \le C_0\left(\varepsilon_1+\varepsilon_2\right)=C_0\varepsilon, \qquad (4.1.73)$$

где $\varepsilon=\varepsilon_1+\varepsilon_2$;

$$C_0 \le \left\|K^{-1}\right\|(T+1)\left(\varepsilon_0+\left\|K^{-1}\right\|\left(\max_{0\le t\le T}|y(t)|+\max_{0\le t\le T}|y'(t)|\right)\right).$$

Таким образом, из (4.1.73) находим

$$\varepsilon_0 \le \left\|K^{-1}\right\|(T+1)\left(\varepsilon_0+\left\|K^{-1}\right\|\left(\max_{0\le t\le T}|y(t)|+\max_{0\le t\le T}|y'(t)|\right)\right)\varepsilon,$$

и, следовательно, при $\varepsilon\left\|K^{-1}\right\|(T+1)\le 0,5$ получаем

$$\varepsilon_0 \le 2\left\|K^{-1}\right\|^2(T+1)\left(\left(\max_{0\le t\le T}|y(t)|+\max_{0\le t\le T}|y'(t)|\right)\right)\varepsilon=C\varepsilon, \quad (4.1.74)$$

т. е. погрешность ε_0 выражается через норму выходного сигнала $\|y(t)\|=\max\limits_{0\le t\le T}|y(t)|$ и его производной $\|y'(t)\|=\max\limits_{0\le t\le T}|y'(t)|$.

Напомним, что выходной сигнал в предлагаемом методе является виртуальным и используется только в вычислениях. В связи с этим в качестве выходных сигналов заранее берутся функции $1,\ t,...,\ t^n$, производные которых находят аналитически. Таким образом, установлена связь между погрешностью определения импульсной переходной функции $h(t,\tau)$ и погрешностью

$$\varepsilon_0=\max_{0\le t\le T}\left|\tilde{x}(t)-x(t)\right|.$$

Неравенства (4.1.69), (4.1.70), (4.1.74) выражают оценки погрешностей вычисления функций $x_i(t),\ i=1,2,...,n+1$, использовав которые, можно оценить погрешность восстановления коэффициентов $\tilde{a}_n(t)$, $\tilde{a}_{n-1}(t)$, ..., $\tilde{a}_0(t)$, определяемых по формулам

$$\tilde{a}_0(t)=\tilde{x}_1(t);\tilde{a}_1(t)=\tilde{x}_2(t)-\tilde{a}_0(t)t;$$
$$\cdots,$$
$$\tilde{a}_n(t)=\tfrac{1}{n!}\left(\tilde{x}_{n+1}(t)-n\left(n-1\right)\cdot...\cdot 2\tilde{a}_{n-1}(t)t-...-\tilde{a}_0(t)t^n\right),$$

откуда, а также из (4.1.56), имеем

$$\left|a_k(t)-\tilde{a}_k(t)\right| =$$
$$=\tfrac{1}{k!}\left|\left(x_{k+1}(t)-\tilde{x}_{k+1}(t)\right)-k(k-1)...2\left(a_{k-1}(t)-\tilde{a}_{k-1}(t)\right)t-...\right.$$
$$\left.-\left(a_0(t)-\tilde{a}_0(t)\right)t^k\right| \le$$
$$\le\tfrac{\varepsilon}{k!}\left(C(y_{k+1})+k!C(y_k)T+...+C(y_1)T^k\right), \quad k=0,1,...,n.$$

Отметим, что в неравенствах (4.1.69), (4.1.74) константа C зависит от конкретной функции $y(t)$. Здесь под $C(y_i), i{=}1, 2, ..., n+1$, понимаются константы C, определяемые неравенством (4.1.69) для систем, описываемых дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами, и неравенством (4.1.74) для систем, описываемых дифференциальными уравнениями с коэффициентами, зависящими от времени, в предположении, что вместо функции $y(t)$, фигурирующей в оценках констант C в указанных формулах, взяты функции $y_i(t),\ i = 1, 2, ...,\ n+1$.

4.2. Параметрическая идентификация одномерных дискретных динамических систем

В данном разделе предлагается метод параметрической идентификации динамических систем, математические модели которых описываются разностными уравнениями вида

$$a_n(k)y(k{+}n){+}a_{n-1}(k)y(k+n-1){+}...{+}a_0(k)y(k){=}x(k), \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{4.2.1}$$

с начальными условиями

$$y(0) = 0, y(1) = 0, ..., y(n-1) = 0, \tag{4.2.2}$$

где $x(k)$ – входной сигнал, $k = 1, 2, ...$; $y(k)$ – выходной сигнал, $k = 1, 2, ...$; $a_0(k)$,$a_1(k)$,...,$a_n(k)$; $k = 1, 2, ...$ – коэффициенты разностного уравнения, которые будем считать параметрами системы, подлежащие определеппию.

Задачу идентификации систем, описываемых уравнениями вида (4.2.8), можно рассматривать с двух позиций.

Во-первых, с позиции определения ИПФ по заданным входным и соответствующим выходным сигналам.

Определение импульсной переходной функции дискретных систем рассмотрено в разд. 2.5.2.1.

Во-вторых, с позиции определения коэффициентов уравнения (4.2.8), что является задачей параметрической идентификации динамических систем.

4.2.1. Определение коэффициентов разностных уравнений с постоянными коэффициентами

Изложенные в предыдущем параграфе методы определения коэффициентов дифференциальных уравнений распространяются и на системы разностных уравнений. Для простоты ограничимся рассмотрением системы из двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{aligned} x_1(n+1) &= a_{11}x_1(n) + a_{12}x_2(n) + f_1(n), \\ x_2(n+1) &= a_{21}x_1(n) + a_{22}x_2(n) + f_2(n), \end{aligned} \tag{4.2.3}$$

которая является аналогом системы дифференциальных уравнений (4.1.11), исследованной в предыдущем разделе. Здесь $\{x_1(n), x_2(n)\}$, $n = 0, 1, \ldots$ – входной сигнал; $\{f_1(n), f_2(n)\}, n = 0, 1, \ldots,$ – выходной сигнал.

Ставится задача определения коэффициентов $\{a_{kl}\}, k, l = 1, 2$.

Пусть функция $\varphi(k)$ определена при $0 \le k \le N$. Через $\overline{\varphi}(k)$ обозначим сумму $\overline{\varphi}(k) = \sum\limits_{l=k}^{N} \varphi(l)$. Подадим на вход системы (4.2.3) входной сигнал $x(k) = (x_1(k), x_2(k)) = (\varphi(k), 0)$.

Тогда выходной сигнал имеет вид

$$\begin{cases} f_1(k) = \varphi(k+1) - a_{11}\varphi(k), \\ f_2(k) = -a_{21}\varphi(k). \end{cases} \tag{4.2.4}$$

Подадим на вход системы (4.2.3) входной сигнал

$$\overline{x}(t) = (\overline{x}_1(t), \overline{x}_2(t)) = (\overline{\varphi(k)}, 0).$$

Выходной сигнал равен

$$\begin{cases} \overline{f}_1(k) = \sum\limits_{l=k+1}^{N} \varphi(l) - a_{11} \sum\limits_{l=k}^{N} \varphi(l), \\ \overline{f}_2(k) = -a_{21} \sum\limits_{l=k}^{N} \varphi(l). \end{cases} \tag{4.2.5}$$

Просуммируем уравнение (4.2.4) по l в пределах $0 \le l \le k-1$

$$\begin{cases} \sum\limits_{l=0}^{k-1} f_1(l) = \sum\limits_{l=0}^{k-1} \varphi(l+1) - a_{11} \sum\limits_{l=0}^{k-1} \varphi(l), \\ \sum\limits_{l=0}^{k-1} f_2(l) = -a_{21} \sum\limits_{l=0}^{k-1} \varphi(l) \end{cases} \tag{4.2.6}$$

и почленно сложим (4.2.6) и (4.2.5).

В результате имеем

$$\begin{cases} \overline{f}_1(k) + \sum\limits_{l=0}^{k-1} f_1(l) = \sum\limits_{l=1}^{N} \varphi(l) - a_{11} \sum\limits_{l=0}^{N} \varphi(l), \\ \overline{f}_2(k) + \sum\limits_{l=0}^{k-1} f_2(l) = -a_{21} \sum\limits_{l=0}^{N} \varphi(l). \end{cases} \tag{4.2.7}$$

Из (4.2.7) следует, что при $\sum\limits_{l=0}^{N} \varphi(l) \neq 0$ справедливы формулы

$$a_{11} = -\frac{\overline{f}_1(k) + \sum\limits_{l=0}^{k-1} f_1(l) - \sum\limits_{l=1}^{N} \varphi(l)}{\sum\limits_{l=0}^{N} \varphi(l)},$$

$$a_{21} = -\frac{\overline{f}_2(k) + \sum\limits_{l=0}^{k-1} f_2(l)}{\sum\limits_{l=0}^{N} \varphi(l)}.$$

Коэффициенты a_{21} и a_{22} вычисляются аналогично при подаче на вход системы вектор - функции $(0, \varphi(k))$ и $(0, \overline{\varphi(k)})$.

4.2.2. Определение переменных коэффициентов разностных уравнений

Существует большое число физических и технических задач, математические модели которых описываются разностными уравнениями с переменными параметрами и системами таких уравнений (см. например, [45, 74, 82]). Помимо этого, даже в тех случаях, когда исследуется непрерывная во времени система, ее математическая модель во многих случаях описывается дискретными системами уравнений, так как входные и выходные сигналы системы измеряются на конечных сетках узлов.

В данном разделе предлагается метод идентификации динамических характеристик систем, математические модели которых описываются разностными уравнениями вида

$$a_n(k)y(k+n) + a_{n-1}(k)y(k+n-1) + ... + a_0(k)y(k) = x(k), \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{4.2.8}$$

с начальными условиями

$$y(0) = 0, y(1) = 0, ..., y(n-1) = 0, \tag{4.2.9}$$

где $x(k)$, $k = 0, 1, 2, ...,$ – входной сигнал; $y(k)$, $k = 0, 1, 2, ...,$ – выходной сигнал системы (4.2.8) с начальными условиями (4.2.9); $a_0(k)$,

$a_1(k)$,...,$a_n(k)$, $k = 0, 1, 2, ...$, – коэффициенты разностного уравнения, которые являются параметрами системы.

В проблеме идентификации систем, описываемых уравнениями вида (4.2.8), можно выделить две задачи, каждая из которых имеет самостоятельный интерес:

1) задачу определения импульсной переходной функции по заданным входным и соответствующим выходным сигналам. Методы определения ИПФ дискретных систем были рассмотрены в разд. 2.5.2.1

2) задачу определения коэффициентов уравнения (4.2.8), что является задачей параметрической идентификации систем.

Методам идентификации параметров динамических систем, описываемых разностными уравнениями с постоянными коэффициентами, посвящена обширная литература. Основные методы представлены в книгах [14, 120]. Там же имеются обширные библиографии.

Идентификация дискретных динамических систем (в том числе и параметрическая идентификация) является актуальной теоретической и прикладной проблемой.

В данном разделе предложены методы параметрической идентификации систем, математические модели которых являются разностными уравнениями с постоянными и переменными коэффициентами.

Постановка задачи. Зная импульсную переходную функцию динамической системы, описываемой разностным уравнением

$$a_n(k)y(k+n) + a_{n-1}(k)y(k+n-1) + ... + a_0(k)y(k) = x(k), \quad (4.2.10)$$

требуется определить коэффициенты $a_0(k)$, ..., $a_n(k)$, k=$0, 1, 2, ...$ Здесь $x(k)$, $k = 0, 1, 2, ...$, – входной сигнал, $y(k)$, $k = 0, 1, 2, ...$, – выходной сигнал.

Замечание 4.2.1. *Импульсная переходная функция может быть определена методом, приведенным в предыдущем параграфе.*

Решение. Для уравнения (4.2.10) рассмотрим эквивалентное разностное уравнение

$$b_n(k)\Delta^n y(k) + b_{n-1}(k)\Delta^{n-1} y(k) + ... + b_0(k)y(k) = x(k), \quad (4.2.11)$$

где $\Delta^n y(k)$ есть разность n-го порядка:

$$\Delta y(k) = y(k+1) - y(k),$$
$$\Delta^2 y(k) = \Delta(\Delta y(k+1) - \Delta y(k)) = y(k+2) - 2y(k+1) + y(k),$$
$$\dots$$
$$\Delta^n y(k) = \Delta(\Delta^{n-1} y(k+1) - \Delta y(k)) = \sum_{m=0}^{n} (-1)^{n-m} C_n^m y(k+m).$$

Следуя [61], можно показать, что коэффициенты уравнений (4.2.10) и (4.2.11) связаны соотношением

$$a_n(k) = b_n(k),$$

$$\begin{gathered} a_{n-1}(k) = C_{n-1}^{n-1} b_{n-1}(k) - C_n^{n-1} b_n(k) = b_{n-1}(k) - n b_n(k), \\ \dots \\ a_0(k) = b_0(k) - b_1(k) + b_2(k) - \dots + (-1)^n b_n(k) = \\ = \sum_{m=0}^{n} (-1)^m b_m(k). \end{gathered} \tag{4.2.12}$$

Поэтому для определения коэффициентов $a_0(k)$, $a_1(k)$, ..., $a_n(k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, уравнения (4.2.10) достаточно найти коэффициенты $b_0(k)$, $b_1(k)$, ..., $b_n(k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, уравнения (4.2.11).

Для определения коэффициентов $b_0(k)$,$b_1(k)$,...,$b_n(k)$, $k = 0$, 1, 2, ... уравнения (4.2.11) по известной импульсной переходной функции $g(k, l)$ найдем виртуальные входные сигналы $x_i(k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, $i = 1, 2, \dots, n+1$, такие, чтобы им соответствовали выходные сигналы

$$y_i(k) = k^{(i-1)}, i = 1, \dots, n+1,$$
$$\text{т.е. } y_1(k) = k^{(0)}, y_2(k) = k^{(1)}, \dots, y_{n+1}(k) = k^{(n)}, \tag{4.2.13}$$

где

$$k^{(0)} = 1(k) = \begin{cases} 1 & \text{при } k \geq 0, \\ 0 & \text{при } k < 0, \end{cases} \qquad k^{(1)} = \begin{cases} k & \text{при } k \geq 0, \\ 0 & \text{при } k < 0, \end{cases}$$

$$k^{(2)} = \begin{cases} k(k-1) & \text{при } k \geq 1, \\ 0 & \text{при } k < 1, \end{cases}$$
$$\dots$$
$$k^{(n)} = \begin{cases} k(k-1)\dots(k-n+1) & \text{при } k \geq n, \\ 0 & \text{при } k < n \end{cases}$$

есть обобщенные степенные функции [61, 119], которые удовлетворяют условиям

$$\begin{gathered}\Delta k^{(n)} = nk^{(n-1)},\\ \Delta^2 k^{(n)} = n(n-1)k^{(n-2)},\\ \cdots\\ \Delta^n k^{(n)} = n!k^{(0)} = n!1(k),\\ \Delta^{n+1} k^{(n)} = 0, \text{ при } k > 0.\end{gathered} \tag{4.2.14}$$

Используя импульсную переходную функцию $g(k,l)$, представим каждый из выходных сигналов (4.2.13) в виде уравнений:

$$\begin{gathered}y_1(k) = \sum_{l=0}^{k} g(k,l)x_1(l),\\ y_2(k) = \sum_{l=0}^{k} g(k,l)x_2(l),\\ \cdots\\ y_{n+1}(k) = \sum_{l=0}^{k} g(k,l)x_{n+1}(l).\end{gathered} \tag{4.2.15}$$

Из решения уравнений (4.2.15) (в предположении, что $g(k,l)\neq 0$ при $k \geq l$) получим последовательности виртуальных входных сигналов $x_i(k)$, $k = 0,1,2,...$, $i = 1,2,...,n+1$, для каждой заданной последовательности выходных сигналов (4.2.13).

Располагая значениями $x_i(k)$, $i = 1,2,...,n+1$, $k = 0,1,...$, находим

$$\begin{gathered}b_0(k) = x_1(k),\\ b_1(k) = x_2(k) - b_0(k)k^{(1)},\\ b_2(k) = \frac{1}{2!}\left(x_3(k) - 2b_1(k)k^{(1)} - b_0(k)k^{(2)}\right),\\ \cdots\\ b_n(k) = \frac{1}{n!}\Big(x_{n+1}(k) - n(n-1)\cdot\dots\cdot 2b_{n-1}(k)k^{(1)} - ... -\\ - b_1(k)nk^{(n-1)} - b_0(k)k^{(n)}\Big).\end{gathered}$$

Значения искомых коэффициентов исходного разностного уравнения (4.2.10) найдем из соотношений (4.2.12).

Достоинство предложенного метода заключается в том, что при известной импульсной переходной функции системы для восстановления коэффициентов разностного уравнения не требуется проводить реальные испытания.

Приведем пример измерительного преобразователя с постоянными коэффициентами, в котором импульсная переходная функция определяется аналитически.

Пример 4.2.1. Рассмотрим измерительный преобразователь, описываемый разностным уравнением

$$a_1(k)y(k+1) + a_0(k)y(k) = x(k) \tag{4.2.16}$$

с начальным условием

$$y(0) = 0. \tag{4.2.17}$$

Пусть точными значениями коэффициентов системы (4.2.16) будут $a_1(k) = 3, a_0(k) = -2$.

Решение. Возьмем входные сигналы:

$$x_1(k) = k + 3, x_2(k) = 4 \cdot 2^k - 1; \tag{4.2.18}$$

им соответствуют выходные сигналы, удовлетворяющие начальным условиям (4.2.17):

$$y_1(k) = k, y_2(k) = 2^k - 1. \tag{4.2.19}$$

1. Вначале найдем ИПФ $g(k,l), k = 0,1,2,...; l = 0,1,...$, преобразователя (4.2.16), которая определяется выражением

$$y(k) = \sum_{l=0}^{\infty} g(k,l)x(l), k = 0,1,2,... \tag{4.2.20}$$

Предположим, что Z-преобразование последовательности $\{g(k,l)\}$, $k = 0,\ 1,2,\ ...;\ l = 0,1,...$ по переменной k удовлетворяет условию

$$G(z,l) = \hat{G}(z)\left[q(z)\right]^{-l}, \tag{4.2.21}$$

где $\hat{G}(z), q(z)$ – некоторые аналитические функции, которые подлежат определению. Для определения $\hat{G}(z), q(z)$ применим Z-преобразование к уравнению (4.2.20) для каждой пары входных (4.2.18) и выходных (4.2.19) сигналов. При условии (4.2.21) на основании (2.5.90), (2.5.93) получим систему уравнений

$$\begin{cases} \hat{G}(z)X_1\left(q(z)\right) = Y_1(z), \\ \hat{G}(z)X_2\left(q(z)\right) = Y_2(z). \end{cases} \tag{4.2.22}$$

Найдем Z-преобразование входных сигналов (4.2.18):

$$X_1(z) = z\frac{3z-2}{(z-1)^2}, X_2(z) = z\frac{3z-2}{(z-1)(z-2)}.$$

Изображениями выходных сигналов (4.2.19) будут функции:

$$Y_1(z) = z\frac{1}{(z-1)^2}, Y_2(z) = z\frac{1}{(z-1)(z-2)}.$$

Тогда система уравнений (4.2.22) примет вид

$$\begin{cases} \hat{G}(z)q(z)\dfrac{3q(z)-2}{(q(z)-1)^2} = z\dfrac{1}{(z-1)^2}, \\ \\ \hat{G}(z)q(z)\dfrac{3q(z)-2}{(q(z)-1)(q(z)-2)} = z\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}. \end{cases}$$

Из этой системы находим $q(z) = z$ и $\hat{G}(z) = \dfrac{1}{3z-2}$. Тогда $G(z,l)=\dfrac{1}{3z-2}z^{-l}$ и по теореме смещения $Z^{-1}[G(z,l)] = g(k-l)$.

Здесь $g(k) = Z^{-1}\left[\hat{G}(z)\right] = Z^{-1}\left[\frac{1}{3z-2}\right]$.

Найдем $Z^{-1}\left[\hat{G}(z)\right]$; для этого разложим $\hat{G}(z)$ в ряд Лорана в окрестности $z = \infty$. Имеем

$$\frac{1}{3z-2}=\frac{1}{3z}\left(\frac{1}{1-\frac{2}{3z}}\right)=$$
$$=\frac{1}{3z}\left(1+\frac{2}{3}z^{-1}+\left(\frac{2}{3}\right)^2 z^{-2}+...+\left(\frac{2}{3}\right)^n z^{-n}+...\right)=$$
$$=\frac{1}{3}z^{-1}+\frac{1}{3}\frac{2}{3}z^{-2}+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2 z^{-2}+...+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n z^{-n}+...$$

Отсюда находим члены последовательности $g(k), k = 0, 1, 2, ...$

$$g(0) = 0, g(1) = \frac{1}{3}, g(2) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right), ..., g(k) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}, ...$$

Тогда импульсная переходная функция имеет вид

$$g(k,l) = g(k-l) = \begin{cases} 0 & \text{при } k = l, \\ \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-l-1} & \text{при } k > l, \end{cases} \qquad (4.2.23)$$

и, следовательно,

$$y(k) = \begin{cases} 0 & \text{при } k = 0, \\ \dfrac{1}{3}\displaystyle\sum_{l=0}^{k-1}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-l-1} x(l) & \text{при } k = 1, 2, ... \end{cases} \qquad (4.2.24)$$

2. Теперь, зная ИПФ $g(k,l) = g(k-l)$, определяемую формулой (4.2.23), найдем коэффициенты уравнения (4.2.16).

Для этого вместо уравнения (4.2.16) рассмотрим уравнение

$$b_1(k)\Delta y(k) + b_0(k)y(k) = x(k). \tag{4.2.25}$$

Коэффициенты уравнений (4.2.16), (4.2.25) связаны соотношениями

$$a_1 = b_1, a_0 = b_0 - b_1. \tag{4.2.26}$$

Найдем такие решения $x_i(k)$, $i = 1,2$ (виртуальные входные сигналы) уравнений (4.2.20), чтобы им соответствовали выходные сигналы $y_i(k)$, $i = 12$:

$$\begin{aligned} y_1(k) &= \begin{cases} 0 & \text{при } k = 0, \\ k^{(0)} = 1 & \text{при } k > 0, \end{cases} \\ y_2(k) &= \begin{cases} 0 & \text{при } k = 0, \\ k^{(1)} = k & \text{при } k > 0. \end{cases} \end{aligned} \tag{4.2.27}$$

В результате получим два уравнения:

$$1 = \frac{1}{3}\sum_{l=0}^{k-1}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-l-1} x_1(l) \quad \text{и} \quad k = \frac{1}{3}\sum_{l=0}^{k-1}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-l-1} x_2(l), \tag{4.2.28}$$
$$k = 1,2,....$$

Найдем решения уравнений при помощи Z-преобразования; при этом первое уравнение в (4.2.28) примет вид

$$\frac{z}{z-1} = \frac{1}{3}\frac{z}{z-\frac{2}{3}}X_1(z).$$

Отсюда $X_1(z) = \dfrac{3z-2}{z-1}$; разлагая в ряд Лорана, получим

$$X_1(z) = 3 + z^{-1} + z^{-2} + ... + z^{-k} + ...$$

Решением первого уравнения (4.2.28) будет последовательность

$$x_1(k) = \begin{cases} 3 \text{ при } k = 0, \\ 1 \text{ при } k > 0. \end{cases} \tag{4.2.29}$$

Аналогично находим решение второго уравнения из (4.2.28):

$$x_2(k) = k + 3. \tag{4.2.30}$$

Подставляя (4.2.27), (4.2.29), (4.2.30) в (4.2.25), при $k > 0$ получим систему уравнений

$$\begin{cases} b_0(k) = 1, \\ b_1(k) + b_0(k)k = k + 3, \end{cases} \quad k = 1, 2, ...$$

Отсюда $b_0(k) = 1$, $b_1(k) = 3, k = 1, 2, ...$ Используя соотношение (4.2.26), найдем коэффициенты $a_0(k), a_1(k)$:

$$\begin{cases} a_1(k) = b_1(k) = 3, \\ a_0(k) = b_0(k) - b_1(k) = -2. \end{cases}$$

Следовательно, коэффициенты уравнения (4.2.16) равны $a_0(k)$=-2, $a_1(k)$=3 и совпадают с точными значениями.

Второй метод определения коэффициентов. Пусть известна импульсная переходная функция $g(k, l)$, $k = 0, 1, 2, ...; l = 0, 1, ...$, системы (4.2.8). Выбирая входные виртуальные сигналы $x_1(k)$, $x_2(k)$, ..., $x_{n+1}(k)$, которые являются линейно независимыми функциями, определим соответствующие выходные виртуальные сигналы $y_1(k)$, $y_2(k)$, ..., $y_{n+1}(k)$:

$$\begin{aligned} y_1(k) &= \sum_{l=0}^{k} g(k, l)x_1(l), \\ y_2(k) &= \sum_{l=0}^{k} g(k, l)x_2(l), \\ &... \\ y_{n+1}(k) &= \sum_{l=0}^{k} g(k, l)x_{n+1}(l). \end{aligned} \tag{4.2.31}$$

Подставляя $x_1(k), x_2(k), ..., x_{n+1}(k)$ и соответствующие выходные сигналы (4.2.31) в уравнение (4.2.8), приходим к системе линейных уравнений

$$\begin{cases} a_n(k)y_1(k + n) + ... + a_0(k)y_1(k) = x_1(k), \\ a_n(k)y_2(k + n) + +... + a_0(k)y_2(k) = x_2(k), \\ ... \\ a_n(k)y_{n+1}(k + n) + ... + a_0(k)y_{n+1}(k) = x_{n+1}(k). \end{cases} \tag{4.2.32}$$

Решая систему (4.2.32), находим искомые коэффициенты $a_0(k)$, $a_1(k)$, ..., $a_n(k)$; $k = 1, 2, ...$

Рассмотрим предыдущий пример. Пусть известна импульсная переходная функция системы (4.2.16). Подавая на вход системы (4.2.16) виртуальные сигналы $x_1(k) = k$+3, $x_2(k) = 4{\cdot}2^k-1$ и используя (4.2.24), получим выходные сигналы $y_1(k) = k$, $y_2(k) = 2^k - 1$.

В этом случае система (4.2.32) примет вид

$$\begin{cases} (k+1)\,a_1 + ka_0 = k+3, \\ \left(2^{k+1}-1\right)a_1 + \left(2^k-1\right)a_0 = 4\cdot 2^k - 1. \end{cases}$$

Откуда получим $a_0(k) = -2$, $a_1(k) = 3$, что совпадает с точными значениями. Отметим, что в случае однозначной разрешимости системы уравнений (4.2.32) данный метод оказывается более практичным, так как не приходится решать совокупность уравнений (4.2.15).

Пример 4.2.2. Рассмотрим измерительный преобразователь, описываемый разностным уравнением

$$a_1(k)y(k+1) + a_0(k)y(k) = x(k) \tag{4.2.33}$$

при начальном значении

$$y(0) = 0. \tag{4.2.34}$$

Пусть точными значениями коэффициентов системы (4.2.33) будут

$$a_1(k) = \begin{cases} 1 \text{ при } k = 0, \\ k \text{ при } k = 1,2,..., \end{cases} \quad a_0(k) = 2 \text{ при } k = 0,1,2,... \tag{4.2.35}$$

Постановка задачи. Пусть известны:

1) значения коэффициентов уравнения (4.2.33) при $k = 0$: $a_0(0) = 2$, $a_1(0) = 1$,

2) входные сигналы:

$$x_1(k) = \begin{cases} 1 \text{ при } k = 0, \\ k+2 \text{ при } k = 1,2,...; \end{cases}$$

$$x_2(k) = \begin{cases} 1 \text{ при } k = 0, \\ k^2+3k \text{ при } k = 1,2,... \end{cases} \tag{4.2.36}$$

и соответсвующие выходные сигналы измерительного преобразователя (4.2.33):

$$y_1(k) = \begin{cases} 0 \text{ при } k = 0, \\ 1 \text{ при } k = 1,2,...; \end{cases} \quad y_2(k) = k \text{ при } k = 1,2,... \tag{4.2.37}$$

Требуется определить значения коэффициентов $a_0(k)$, $a_1(k)$, $k = 1,2,...$, измерительного преобразователя (4.2.33).

Решение. Определение коэффициентов будем проводить в два этапа.

Первый этап. Определение импульсной переходной функции $g(k,l)$ измерительного преобразователя (4.2.33).

Второй этап. По найденной импульсной переходной функции определим значения коэффициентов $a_0(k)$, $a_1(k)$, $k = 1, 2, ...$

Определение импульсной переходной функции.

Импульсная переходная функция $g(k,l), k, l = 0, 1, 2, ...$, системы (4.2.33) с учетом физической реализуемости и начальных условий (4.2.34) определяется выражением

$$y(k) = \begin{cases} 0 \text{ при } k = 0, \\ \sum\limits_{l=0}^{k} g(k,l)x(l) \text{ при } k = 1, 2, ... \end{cases} \tag{4.2.38}$$

Предположим, что Z-преобразование последовательности $\{g(k,l)\}$, k, l=0, 1, 2, ..., по переменной k удовлетворяет условию

$$G(z,l) = \hat{G}(z)\left[q(z)\right]^{-l}, \tag{4.2.39}$$

где $\hat{G}(z), q(z)$ – некоторые аналитические функции, которые подлежат определению. Для определения $\hat{G}(z), q(z)$ применим Z-преобразование к уравнению (4.2.38) для каждой пары входных (4.2.36) и выходных (4.2.37) сигналов. При условии (4.2.39) на основании (2.5.90) получим систему уравнений

$$\begin{cases} \hat{G}(z)X_1\left(q(z)\right) = Y_1(z), \\ \hat{G}(z)X_2\left(q(z)\right) = Y_2(z). \end{cases} \tag{4.2.40}$$

Найдем Z-преобразование входных сигналов (4.2.36):

$$X_1(z) = \frac{2z(2z-1)}{(z-1)^3}, \;\; X_2(z) = \frac{z(2z-1)}{(z-1)^2}.$$

Изображениями выходных сигналов (4.2.37) будут функции:

$$Y_1(z) = \frac{z}{(z-1)^2}, \;\; Y_2(z) = \frac{z}{z-1}.$$

Тогда система уравнений (4.2.40) примет вид

$$\begin{cases} \hat{G}(z)\dfrac{2q(z)(2q(z)-1)}{(q(z)-1)^3} = \dfrac{z}{(z-1)^2}, \\ \\ \hat{G}(z)\dfrac{q(z)(2q(z)-1)}{(q(z)-1)^2} = \dfrac{z}{(z-1)}. \end{cases}$$

Ее решениями являются функции

$$q(z) = 2z - 1 \quad \text{и } \hat{G}(z) = \frac{4z(z-1)}{8z^2 - 10z + 3}.$$

Тогда $G(z,l) = \dfrac{4z(z-1)}{8z^2 - 10z + 3}\,(2z-1)^{-l}$.

Можно показать, что импульсная переходная функция имеет вид

$$g(k,l) = \begin{cases} 0, \quad k = l = 0, \\ \left(\frac{1}{2}\right)^k - \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^k, \quad l = 0, \\ \left(\frac{1}{2}\right)^k (k+1) - \left(\frac{3}{4}\right)^k, \quad l = 1, \\ C_{k-1}^2 \left(\frac{1}{2}\right)^k + \left(\frac{1}{2}\right)^k (2k+1) - 2\left(\frac{3}{4}\right)^k, \quad l = 2, \\ \left(2C_{k-1}^2 + C_{k-1}^3\right)\left(\frac{1}{2}\right)^k + \\ \qquad +3\left(\frac{1}{2}\right)^k (k+1) - 4\left(\frac{3}{4}\right)^k, \end{cases} \quad l=3, \tag{4.2.41}$$

$$\left(3\sum_{j=2}^{l-2} 2^{j-2} C_{k-1}^{l-j} + 2C_{k-1}^{l-1} + C_{k-1}^{l}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^k + \\ +3\cdot 2^{l-3}\left(\frac{1}{2}\right)^k (k+1) - 2^{l-1}\left(\frac{3}{4}\right)^k, \quad l \geq 4.$$

Таким образом, связь «вход – выход», измерительного преобразователя (4.2.33) можно записать в виде

$$y(k) = \sum_{l=0}^{k} g(k,l)x(l). \tag{4.2.42}$$

Отметим, что выходной сигнал $y(k)$, определяемый выражением (4.2.42) с импульсной переходной функцией (4.2.41), при $k = 0$ имеет значение $y(0) = 0$, т. е. удовлетворяет начальным условиям (4.2.34).

Определение коэффициентов

Теперь, зная импульсную переходную функцию $g(k,l)$, определим коэффициенты уравнения (4.2.33).

Для этого вместо уравнения (4.2.33) рассмотрим уравнение

$$b_1(k)\Delta y(k) + b_0(k)y(k) = x(k). \tag{4.2.43}$$

Коэффициенты уравнений (4.2.33), (4.2.43) связаны соотношениями

$$a_1 = b_1, a_0 = b_0 - b_1. \tag{4.2.44}$$

Используя связь вход–выход, которая определяется формулой (4.2.42) с импульсной переходной функцией (4.2.41), найдем такие входные сигналы $x_i(k)$, $i = 1, 2$, чтобы им соответствовали выходные сигналы

$$\begin{array}{l} y_1(k) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{при } k = 0, \\ k^{(0)} = 1 & \text{при } k > 0, \end{array} \right. \\ y_2(k) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{при } k = 0, \\ k^{(1)} = k & \text{при } k > 0. \end{array} \right. \end{array} \tag{4.2.45}$$

В результате получим систему уравнений

$$1 = \sum_{l=0}^{k} g(k,l)x_1(l),\ k = \sum_{l=0}^{k} g(k,l)x_2(l),\ k = 1, 2, ... \tag{4.2.46}$$

Решением системы уравнений (4.2.46) будут последовательности

$$x_1(k) = k + 2,\ x_2(k) = k^2 + 3k. \tag{4.2.47}$$

Подставляя (4.2.45), (4.2.47) в (4.2.43), учитывая (4.2.14) при $k > 0$, получим систему уравнений относительно коэффициентов $b_0(k)$, $b_1(k)$:

$$\left\{ \begin{array}{c} b_0(k) = k + 2, \\ b_1(k) + k(k+2)(k)k = k^2 + 3k, \end{array} \right. \quad k = 1, 2, ...$$

Отсюда $b_0(k) = k + 2$, $b_1(k) = k, k = 1, 2, ...$ Используя соотношение (4.2.44), найдем коэффициенты $a_0(k), a_1(k)$:

$$\left\{ \begin{array}{c} a_1(k) = b_1(k) = k, \\ a_0(k) = b_0(k) - b_1(k) = 2. \end{array} \right.$$

Следовательно, коэффициенты уравнения (4.2.33) равны $a_0(k) = 2$, $a_1(k) = k$, что совпадает с точными их значениями (см. (4.2.35)).

Замечание. Значения коэффициентов $a_0(k)$, $a_1(k)$ измерительного преобразователя (4.2.33) можно найти, используя уравнения (4.2.33). Подставляя при $k > 0$ (4.2.36), (4.2.37) в (4.2.33), получим систему линейных алгебраических уравнений относительно искомых коэффициентов $a_0(k)$, $a_1(k)$:

$$\begin{cases} a_1(k) + a_0(k) = k, \\ a_1(k)(k+1) + a_0(k)k = k^2 + 3k. \end{cases} \tag{4.2.48}$$

Так как определитель системы (4.2.48) отличен от нуля

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ k+1 & k \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$

то система (4.2.48) имеет единственное решение. Решением (4.2.48) будет $a_0(k) = 2$, $a_1(k) = k$ при $k = 1, 2, ...$, что совпадает с точными значениями (4.2.35).

4.2.3. Идентификация параметров динамических систем при конечных входных и выходных выборках

В предыдущих разделах предложены алгоритмы определения импульсной переходной функции и восстановления параметров динамической системы в классической постановке – в предположении, что известны бесконечные выборки входных и выходных сигналов.

В данном разделе предлагаются модификации этих алгоритмов в предположении, что известны конечные выборки входных и выходных сигналов.

В качестве входных сигналов можно взять последовательности $x_1(k)$ и $x_2(k)$, стремящиеся к нулю при $k \to \infty$.

Ограничившись при практической реализации алгоритма первыми N элементами последовательности, мы вносим небольшую погрешность в определение функций $X_1(z)$, $X_2(z)$. Если уравнение (4.2.8) при начальных значениях (4.2.9) однозначно разрешимо и обратный оператор ограничен, то в определение функций $Y_1(z)$, $Y_2(z)$, также вносится незначительная погрешность. Это позволяет восстановить импульсную переходную функцию с достаточной точностью.

Кроме того, в качестве входных сигналов можно взять периодические дискретные функции и ограничиться подачей на вход устройства одного-двух периодов входного сигнала.

Продемонстрируем сказанное на модельном примере.

Отметим, что для восстановления коэффициентов разностного уравнения n-го порядка по алгоритму, описанному выше, достаточно располагать значениями $g(k,l), k,l = 0, 1, ..., n$, импульсной переходной функции. Отсюда следует, что при приближенном определении импульсной переходной функции достаточно ограничиться $2n$ отсчетами входных сигналов.

Пример 4.2.3. В примере 4.2.1 был рассмотрен измерительный преобразователь, описываемый разностным уравнением

$$a_1(k)y(k+1) + a_0(k)y(k) = x(k) \tag{4.2.49}$$

с начальным условием

$$y(0) = 0. \tag{4.2.50}$$

Пусть точные значения коэффициентов системы (4.2.49) будут $a_1(k) = 3$, $a_0(k) = -2$.

Возьмем входные периодические сигналы:

$$\begin{gathered} x_1(k) = 3\sin\left(\frac{\pi(k+1)}{5}\right) - 2\sin\left(\frac{\pi k}{5}\right), \\ x_2(k) = 3\sin\left(\frac{2\pi(k+1)}{5}\right) - 2\sin\left(\frac{2\pi k}{5}\right), \\ k = 0, 1, 2, ..., N; \end{gathered} \tag{4.2.51}$$

им соответствуют выходные периодические сигналы, удовлетворяющие начальным условиям (4.2.50):

$$y_1(k) = \sin\left(\frac{\pi k}{5}\right), y_2(k) = \sin\left(\frac{2\pi k}{5}\right), k = 0, 1, 2, ..., N. \tag{4.2.52}$$

Здесь величина N кратна 10.

1. Найдем ИПФ $g(k, l)$, k, l=0, 1, 2, ..., N, системы (4.2.49), которая определяется выражением

$$y(k) = \sum_{l=0}^{k} g(k, l)x(l), k = 0, 1, 2, ..., N. \tag{4.2.53}$$

Предположим, что Z-преобразование последовательности $\{g(k, l)\}$, $k, l = 0$, 1, 2, ..., по переменной k удовлетворяет условию

$$G(z, l) = \hat{G}(z)\left[q(z)\right]^{-l}, \tag{4.2.54}$$

где $\hat{G}(z), q(z)$ - некоторые аналитические функции, которые подлежат определению. Для определения $\hat{G}(z), q(z)$ применим Z-преобразование к уравнению (4.2.53) для каждой пары входных (4.2.51) и выходных сигналов (4.2.52). При условии (4.2.54) на основании (2.5.90), (2.5.93) получим систему уравнений

$$\begin{cases} \hat{G}(z)X_1\left(q(z)\right) = Y_1(z), \\ \hat{G}(z)X_2\left(q(z)\right) = Y_2(z). \end{cases} \tag{4.2.55}$$

Найдем Z-преобразование входных сигналов (4.2.51):

$$X_1(z) = -\frac{\sqrt{2}z\sqrt{5-\sqrt{5}}(3z-2)}{2z-4z^2+2\sqrt{5}z-4},$$

$$X_2(z) = \frac{\sqrt{2}z\sqrt{5+\sqrt{5}}(3z-2)}{2z+4z^2-2\sqrt{5}z+4}.$$

Изображениями выходных сигналов (4.2.52) будут функции:

$$Y_1(z) = -\frac{\sqrt{2}z\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2z-4z^2+2\sqrt{5}z-4},$$

$$Y_2(z) = \frac{\sqrt{2}z\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2z+4z^2-2\sqrt{5}z+4}.$$

Здесь учтено, что

$$\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{2}\sqrt{5-\sqrt{5}}}{4} \text{ и } \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{2}\sqrt{5+\sqrt{5}}}{4}.$$

Тогда система уравнений (4.2.55) примет вид

$$\begin{cases} \hat{G}(z)\dfrac{\sqrt{2}q(z)\sqrt{5-\sqrt{5}}(3q(z)-2)}{2q(z)-4q^2(z)+2\sqrt{5}q(z)-4} = \dfrac{\sqrt{2}z\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2z-4z^2+2\sqrt{5}z-4}, \\ \hat{G}(z)\dfrac{\sqrt{2}q(z)\sqrt{5+\sqrt{5}}(3q(z)-2)}{2q(z)+4q^2(z)-2\sqrt{5}q(z)+4} = \dfrac{\sqrt{2}z\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2z+4z^2-2\sqrt{5}z+4}. \end{cases}$$

Разделив первое уравнение на второе, получим

$$\frac{q(z)}{2q^2(z)-\left(\sqrt{5}+1\right)q(z)+2} = \frac{z}{2z^2-\left(\sqrt{5}+1\right)z+2},$$

откуда $q_1(z) = z$, $q_2(z) = \dfrac{1}{z}$.

При $q_2(z) = \dfrac{1}{z}$ Z-преобразование функции $G(z,l)$ имеет вид $G(z,l) = \hat{G}(z)z^l$, $l = 0,1,2,...$ и $\hat{G}(z) = \dfrac{z}{3-2z}$. Обратное Z-преобразование функции $G(z,l) = \dfrac{z}{3-2z}z^l$ при $l = 0,1,2,...,N$ не существует.

При $q_1(z) = z$ получим $\hat{G}(z) = \dfrac{1}{3z-2}$ и $G(z,l) = \dfrac{1}{3z-2}z^{-l}$, что совпадает с Z-преобразованием функции $g(k,l)$ по переменной k в примере 3.

Тогда импульсная переходная функция имеет вид

$$g(k,l) = g(k-l) = \begin{cases} 0 & \text{при } k \le l, \\ \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-l-1} & \text{при } k > l, \end{cases} \qquad (4.2.56)$$
$$l = 0, 1, 2, ..., k, k = 0, 1, 2, ..., N,$$

и, следовательно,

$$y(k) = \begin{cases} 0 & \text{при } k = 0, \\ \frac{1}{3}\sum\limits_{l=0}^{k-1}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-l-1} x(l) & \text{при } k = 1, 2, \ldots, N. \end{cases} \qquad (4.2.57)$$

2. Теперь, зная ИПФ $g(k,l) = g(k-l)$, определяемую формулой (4.2.23), и выражение для выходного сигнала, определяемое формулой (4.2.57), определим коэффициенты уравнения (4.2.49), проделывая в точности все выкладки проделанные в примере 4.2.1. В результате убеждаемся, что коэффициенты уравнения (4.2.49) равны $a_0(k) = -2$, $a_1(k) = 3$, что совпадает с точными значениями.

4.3. Параметрическая идентификация непрерывных линейных динамических систем с распределенными параметрами[2]

Большой класс задач идентификации связан с определением параметров систем. В случае, когда математические модели динамических систем описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями, дифференциальными уравнениями в частных производных или разностными уравнениями, параметрическая идентификация систем сводится к определению коэффициентов этих уравнений.

В данном разделе предложен метод параметрической идентификации динамических систем с распределенными параметрами, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных

$$\sum_{k=1}^{n} a_k(t)\frac{\partial^k u(t,x)}{\partial t^k} + \sum_{k=1}^{m} b_k(t)\frac{\partial^k u(t,x)}{\partial x^k} + c_0(t)u(t,x) = f(t,x), \qquad (4.3.1)$$
$$0 \le t,\ x < \infty,$$

с начальными условиями

$$u(0,x) = 0,\ \frac{\partial^k u(0,x)}{\partial t^k} = 0, k = 1, 2, ..., n-1, \qquad (4.3.2)$$

[2]Данный раздел написан по материалам работы [32].

и краевыми условиями

$$u(t,0)=0,\ \frac{\partial^k u(t,0)}{\partial x^k}=0, k=1,2,...,m-1, \tag{4.3.3}$$

где $f(t,x), u(t,x)$ – входной и выходной сигналы системы соответственно; t – переменная времени, x – пространственная координата; $a_k(t),\ k=1,2,...,n;\ b_k(t), k=1,2,...,m; c_0(t)$ – коэффициенты, подлежащие определению.

Постановка задачи. Требуется, подавая два тестовых сигнала $f_1(t,x), f_2(t,x)$ и располагая соответствующими выходными сигналами системы (4.3.1), определить ее параметры $a_k(t)$, k=$1,2,...,n$; $b_k(t),\ k=1,2,...,m; c_0(t)$.

Применяя преобразование Лапласа по переменной x к уравнению (4.3.1) с начальными условиями (4.3.2), получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\sum_{k=1}^{n} a_k(t)\frac{d^k U(t,p)}{dt^k}+\left(b_m(t)p^m+b_{m-1}(t)p^{m-1}+b_1(t)p+...\right.$$
$$\left.+c_0(t)\right)U(t,p)=F(t,p) \tag{4.3.4}$$

с начальными условиями $U(0,p)=0, \frac{d^k U(0,p)}{dt^k}=0, k=1,2,...,n-1.$

Уравнение (4.3.4) является обыкновенным дифференциальным уравнением; p будем рассматривать как параметр. Рассмотрим виртуальную динамическую систему, описываемую уравнением (4.3.4), где p – параметр, $F(t,p), U(t,p)$ – входной и выходной сигналы соответственно, $a_k(t),\ k=1,2,...,n;\ b_k(t), k=1,2,...,m; c_0(t)$ – параметры системы, подлежащие определению. Систему, описываемую уравнением (4.3.4), будем рассматривать как параметрическую систему, а ИПФ $h(t,\tau,p)$ системы (4.3.4) – как параметрическую импульсную переходную функцию.

Поставленную задачу разобьем на две задачи.

Первая задача. Требуется, подавая два тестовых сигнала $f_1(t,x),\ f_2(t,x)$ и зная соответствующие выходные сигналы $u_1(t,x)$, $u_2(t,x)$ системы (4.3.1), определить импульсную переходную функцию системы (4.3.4).

Решение. Известно, что связь вход–выход системы (4.3.4) описывается интегральным уравнением

$$\int_0^t h(t,\tau,p)F(\tau,p)d\tau=U(t,p) \tag{4.3.5}$$

для систем, описываемых дифференциальными уравнениями вида (4.3.4) с переменными параметрами, и уравнением

$$\int_0^t h(t-\tau,p)F(\tau,p)d\tau = U(t,p) \tag{4.3.6}$$

для систем, описываемых дифференциальными уравнениями с постоянными параметрами.

Здесь $U(t,p)$ – выходной сигнал, $F(t,p)$ – входной сигнал, $h(t,\tau,p)$ – импульсная переходная функция системы (4.3.4).

Замечание 4.3.1. *Учитывая физическую реализуемость очевидно, что* $h(t,\tau,p)=0$ *при* $t<\tau$. *Аналогично* $h(t,p)=0$ *при* $t<0$.

Будем считать, что уравнения (4.3.5) и (4.3.6) однозначно разрешимы. Это условие выполнимо для широкого класса уравнений Вольтерра. В частности, оно выполнимо, если функции $h(t,p)$ и $h(t,\tau,p)$ дифференцируемы по переменной t.

Применим метод определения импульсной переходной функции, рассмотренный в разд. 2.5.

Пусть изображение Лапласа по переменной x функций $u_1(t,x)$, $u_2(t,x)$ есть $U_1(t,p)$, $U_2(t,p)$, а функций $f_1(t,x)$, $f_2(t,x)$ – $F_1(t,p)$, $F_2(t,p)$.

Пусть функция $h(t,\tau,p)$ удовлетворяет следующему условию: существуют аналитические в полуплоскости $\mathrm{Re}z \geq \sigma(\sigma = \mathrm{const})$ функции $q(z)$ и $H(z,p)$ такие, что

$$\int_0^\infty e^{-zt}h(t,\tau,p)dt = e^{-\tau q(z)}H(z,p), \mathrm{Re}z \geq \sigma. \tag{4.3.7}$$

Тогда изображение Лапласа уравнения (4.3.5) по переменной t будет иметь вид

$$H(z,p)\hat{F}(q(z),p) = \hat{U}(z,p), \tag{4.3.8}$$

где $\hat{U}(z,p), \hat{F}(z,p)$ есть изображение Лапласа по переменной t функций $U(t,p)$ и $F(t,p)$.

Запишем выраженире (4.3.5) в виде

$$\int_0^\infty K(t,\tau)h(t,\tau,p)F(\tau,p)d\tau = U(t,p), \tag{4.3.9}$$

где

$$K(t,\tau)=\begin{cases} 1 \text{ при } \tau \le t, \\ 0 \text{ при } \tau > t. \end{cases}$$

Применяя преобразование Лапласа к левой части выражения (4.3.9) и учитывая условия (4.3.7), получим

$$\int_0^\infty \left(\int_0^t h(t,\tau,p)F(\tau,p)d\tau \right) e^{-tz}dt =$$

$$= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty K(t,\tau)h(t,\tau,p)F(\tau,p)d\tau \right) e^{-tz}dt =$$

$$= \int_0^\infty \left(\int_\tau^\infty h(t,\tau,p)e^{-tz}dt \right) F(\tau,p)d\tau =$$

$$= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty h(t,\tau,p)e^{-tz}dt \right) F(\tau,p)d\tau =$$

$$= \int_0^\infty H(z,p)e^{-\tau q(z)}F(\tau,p)d\tau = H(z,p)\int_0^\infty e^{-\tau q(z)}F(\tau,p)d\tau =$$

$$= H(z,p)F(q(z),p).$$

Отсюда следует справедливость (4.3.8). В случае уравнения (4.3.6) $q(z)=z$.

Пусть $U_1(t,p)$, $U_2(t,p)$ и $F_1(t,p)$, $F_2(t,p)$ – изображения Лапласа по переменной x выходных $u_1(t,x)$, $u_2(t,x)$ и входных $f_1(t,x)$, $f_2(t,x)$ сигналов; $\hat{U}_1(z,p)$, $\hat{U}_2(z,p)$ и $\hat{F}_1(z,p)$, $\hat{F}_2(z,p)$ – изображение Лапласа по переменной t функций $U_1(t,p)$, $U_2(t,p)$ и $F_1(t,p)$, $F_2(t,p)$. Тогда из формулы (4.3.8) получим систему уравнений относительно функций $H(z,p)$, $q(z)$

$$\begin{cases} H(z,p)\hat{F}_1(q(z),p)=\hat{U}_1(z,p), \\ H(z,p)\hat{F}_2(q(z),p)=\hat{U}_2(z,p). \end{cases} \tag{4.3.10}$$

Решая данную систему, находим функции $H(z,p), q(z)$.

Тогда функция $h(t,\tau,p)$ определяется формулой

$$h(t,\tau,p)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{-\tau q(z)}H(z,p)e^{zt}dz,$$

причем решению задачи соответствуют значения $h(t,\tau,p)$ при $t \ge \tau$.

Вычисляя интеграл в правой части формулы по квадратурным формулам, получаем приближенное значение импульсной переходной функции.

Вторая задача. Требуется, зная функцию $h(t,\tau,p)$ измерительного преобразователя (4.3.4), найти параметры системы $a_k(t)$, $k=1,2,...,n$; $b_k(t), k=1,2,...,m$; $c_0(t)$.

Решение. Определим виртуальные входные сигналы $\tilde{F}_1(t,p)$, $\tilde{F}_2(t,p)$, ..., $\tilde{F}_{n+1}(t,p)$ так, чтобы им соответствовали выходные сигналы

$$\tilde{U}_1(t,p)=1(t)v_1(p),\ \tilde{U}_2(t,p)=tv_2(p),...,\ \tilde{U}_{n+1}(t,p)=t^n v_{n+1}(p), \quad (4.3.11)$$

где в качестве $v_k(p)$, $k=1,...,n+1$, можно взять изображения Лапласа от функции $1(t)x^k$, т.е. $v_k(p)=\dfrac{k!}{p^{k+1}}$, $k=1,2,...,n+1$. В этом случае выходные сигналы системы (4.3.1) имеют вид $u_k(t,x)=t^k x^m$, $k=0,1,...,n$.

Используя уравнение (4.3.5), представим (4.3.11) в виде совокупности интегральных уравнений для определения искомых входных сигналов $\tilde{F}_1(t,p), \tilde{F}_2(t,p), ..., \tilde{F}_{n+1}(t,p)$:

$$\begin{cases} \int\limits_0^t h(t,\tau,p)\tilde{F}_1(\tau,p)d\tau = 1(t)v_1(p), \\ \int\limits_0^t h(t,\tau,p)\tilde{F}_2(\tau,p)d\tau = tv_2(p), \\ \qquad\qquad ... \\ \int\limits_0^t h(t,\tau,p)\tilde{F}_{n+1}(\tau,p)d\tau = t^n v_{n+1}(p). \end{cases} \quad (4.3.12)$$

Отметим, что каждое из уравнений системы (4.3.12) есть интегральное уравнение Вольтерра I рода. Решив систему (4.3.12), получаем для каждого выходного виртуального сигнала $\tilde{U}_i(t,p)$ соответствующий входной сигнал $\tilde{F}_i(t,p); i=1,2,...,n+1$. Подставляя $U_i(t,p)$ и $F_i(t,p); i=1,2,...,n+1$, в уравнение (4.3.4), приходим к системе уравнений:

$$\begin{cases} a_n(t)\delta^{(n-1)}(t)+...+a_1(t)\delta(t)+ \\ +\left(b_m(t)p^m+...+b_1(t)p+c_0(t)\right)=\dfrac{\tilde{F}_1(t,p)}{v_1(p)}, \\ a_n(t)\delta^{(n-2)}(t)+...+a_1(t)1(t)+ \\ +\left(b_m(t)p^m+...+b_1(t)p+c_0(t)\right)t=\dfrac{\tilde{F}_2(t,p)}{v_2(p)}, \\ ... \\ n!a_n(t)1(t)+...+na_1(t)t^{n-1}+ \\ +\left(b_m(t)p^m+...+b_1(t)p+c_0(t)\right)t^n=\dfrac{\tilde{F}_{n+1}(t,p)}{v_{n+1}(p)}, \end{cases} \tag{4.3.13}$$

где $\delta(t)$ – дельта-функция Дирака.

Аналогично, как в разд. 4.1.3, имеем

$$\frac{d}{dt}1(t)=\delta(t),\frac{d^2}{dt^2}1(t)=\delta'(t),\ldots,\frac{d^n}{dt^n}1(t)=\delta^{(n-1)}(t).$$

Рассматривая $\delta(t)$-функцию и ее производные при $t>0$, получим

$$\delta(t)=\delta'(t)=...=\delta^{(n-1)}(t)=0. \tag{4.3.14}$$

Тогда при значениях $t>0$ система уравнений (4.3.13) примет вид

$$\begin{cases} b_m(t)p^m+b_{m-1}(t)p^{m-1}+...+b_1(t)p+c_0(t)=\dfrac{\tilde{F}_1(t,p)}{v_1(p)}, \\ a_1(t)=\dfrac{\tilde{F}_2(t,p)}{v_2(p)}-t\dfrac{\tilde{F}_1(t,p)}{v_1(p)}, \\ ... \\ a_n(t)=\dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{\tilde{F}_{n+1}(t,p)}{v_{n+1}(p)}-(n-1)...2\cdot a_{n-1}(t)t-...\right. \\ \left.\qquad ...-na_1(t)t^{n-1}-\dfrac{\tilde{F}_1(t,p)}{v_1(p)}t^n\right). \end{cases} \tag{4.3.15}$$

Из системы уравнений (4.3.15) определяются параметры $a_k(t)$, $k=1,2,...,n$. Для определения параметров $b_k(t),k=1,2,...,m;c_0(t)$ рассмотрим первое уравнений системы (4.3.15):

$$\left(b_m(t)p^m+b_{m-1}(t)p^{m-1}+...+b_1(t)p+c_0(t)\right)=\frac{\tilde{F}_1(t,p)}{v_1(p)}. \tag{4.3.16}$$

Аппроксимируя правую часть уравнения (4.3.16) полиномом степени m по переменной p

$$\frac{\tilde{F}_1(t,p)}{v_1(p)} = A_m(t)p^m + A_{m-1}(t)p^{m-1} + ... + A_1(t)p + A_0(t) \quad (4.3.17)$$

и приравнивая коэффициенты полинома и выражения слева в уравнении (4.3.17) при одинаковых степенях p, вычислим искомые значения параметров $b_k(t) = A_k(t), k = 1, 2, ..., m; c_0(t) = A_0(t)$.

Значения коэффициентов разложения (4.3.17) можно найти методом наименьших квадратов или методом коллокаций.

По методу наименьших квадратов коэффициенты определяются из условия минимума функционала

$$\sum_{k=0}^{N} \left(A_m(t)p_k^m + ...+b_1(t)p_k+A_0(t)-\frac{\tilde{F}_1(t,p_k)}{v_1(p_k)} \right)^2 \to \min, \quad (4.3.18)$$

где узлы $p_k, k = 0, 1, ..., N$, выбраны в области, где функция $\frac{\tilde{F}_1(t,p)}{v_1(p)}$ является аналитической.

Условие минимума функционала (4.3.18) приводит к системе уравнений

$$\begin{cases} A_m(t)\sum\limits_{k=0}^{N} p_k^m + A_{m-1}(t)\sum\limits_{k=0}^{N} p_k^{m-1} + ... \\ ... + A_0(t)(N+1) = \sum\limits_{k=0}^{N} \dfrac{\tilde{F}_1(t,p_k)}{v_1(p_k)}, \\ A_m(t)\sum\limits_{k=0}^{N} p_k^{m+1} + A_{m-1}(t)\sum\limits_{k=0}^{N} p_k^{m} + ... \\ ... + A_0(t)\sum\limits_{k=0}^{N} p_k = \sum\limits_{k=0}^{N} \dfrac{\tilde{F}_1(t,p_k)}{v_1(p_k)} p_k, \\ ... \\ A_m(t)\sum\limits_{k=0}^{N} p_k^{2m-1} + A_{m-1}(t)\sum\limits_{k=0}^{N} p_k^{2m-2} + ... \\ ... + A_0(t)\sum\limits_{k=0}^{N} p_k^{m} = \sum\limits_{k=0}^{N} \dfrac{\tilde{F}_1(t,p_k)}{v_1(p_k)} p_k^{m-1}. \end{cases}$$

По методу коллокаций коэффициенты $A_k(t)$, $k = 0, 1, ..., m$, разложения (4.3.17) определяются из решения системы

$$\begin{cases} A_m(t)p_1^m + A_{m-1}(t)p_1^{m-1} + ... + A_0(t) = \dfrac{\tilde{F}_1(t, p_1)}{v_1(p_1)}, \\ A_m(t)p_2^m + A_{m-1}(t)p_2^{m-1} + ... + A_0(t) = \dfrac{\tilde{F}_1(t, p_2)}{v_1(p_2)}, \\ ... \\ A_m(t)p_{m1}^m + A_m(t)p_{m+1}^{m-1} + ... + A_0(t) = \dfrac{\tilde{F}_1(t, p_{m+1})}{v_1(p_{m+1})}, \end{cases}$$

где узлы $p_k, k = 1, 2..., m+1$, выбраны в области, где функция $\frac{\tilde{F}_1(t,p)}{v_1(p)}$ является аналитической.

Достоинством данного метода является то, что для определения коэффициентов $a_k(t), k = 1, 2, ..., n; b_k(t), k = 1, 2, ..., m; c_0(t)$ уравнения (4.3.1) не требуется подавать реальные входные сигналы и фиксировать отклик системы на эти воздействия. Достаточно определить импульсную переходную функцию $h(t, \tau, p)$ системы (4.3.4).

Пример 4.3.1. Рассмотрим измерительный преобразователь, функционирование которого описывается дифференциальным уравнением в частных производных:

$$a\frac{\partial u}{dt} + b\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(t, x), \tag{4.3.19}$$

где $f(t, x), u(t, x)$ —входной и выходной сигналы системы соответственно; a, b — подлежащие определению коэффициенты, характеризующие работу измерительного преобразователя. Требуется найти коэффициенты уравнения (4.3.19), зная два тестовых входных и соответствующих им выходных сигнала.

Решение. Применив преобразование Лапласа к уравнению (4.3.19) по переменной x, получим

$$a\frac{dU(t, p)}{dt} + bp^2U(t, p) = F(t, p). \tag{4.3.20}$$

Определим импульсную переходную функцию $h(t, \tau, p)$ системы, описываемую уравнением (4.3.19).

В качестве входных сигналов возьмем

$$\begin{cases} u_1(t, x) = tx^3, \\ u_2(t, x) = t^2x^2, \end{cases}$$

им соответствуют выходные сигналы:

$$\begin{cases} f_1(t,x) = 2x^3 + 18tx, \\ f_2(t,x) = 4tx^2 + 6t^2, \end{cases}$$

которые определяются при точных значениях параметров $a = 2$, $b = 3$ в уравнении (4.3.19).

Изображения Лапласа функций $u_1(t,x), u_2(t,x), f_1(t,x), f_2(t,x)$ по переменной x имеют вид:

– для входных сигналов:

$$\begin{cases} U_1(t,p) = \dfrac{6t}{p^4}, \\ \\ U_2(t,x) = \dfrac{2t^2}{p^3}; \end{cases} \tag{4.3.21}$$

– для выходных сигналов:

$$\begin{cases} F_1(t,p) = \dfrac{12}{p^4} + \dfrac{18t}{p^2}, \\ \\ F_2(t,p) = \dfrac{8t}{p^3} + \dfrac{6t^2}{p}. \end{cases} \tag{4.3.22}$$

Изображения Лапласа по переменной t для выражений (4.3.21), (4.3.22) имеют вид

$$\begin{cases} \hat{U}_1(z,p) = \dfrac{6t}{z^2p^4}, \\ \\ \hat{U}_2(z,x) = \dfrac{4}{z^3p^3}, \end{cases} \tag{4.3.23}$$

$$\begin{cases} \hat{F}_1(z,p) = \dfrac{12}{zp^4} + \dfrac{18}{z^2p^2}, \\ \\ \hat{F}_2(z,p) = \dfrac{8}{z^2p^3} + \dfrac{12}{z^3p} \end{cases} \tag{4.3.24}$$

Подставляя (4.3.23), (4.3.24) в систему уравнений (4.3.10), получим

$$\begin{cases} \hat{H}(z,p)\dfrac{8q(z) + 12p^2}{q^3(z)p^3} = \dfrac{4}{z^3p^3}, \\ \\ \hat{H}(z,p)\dfrac{12q(z) + 18p^2}{q^2(z)p^4} = \dfrac{6}{z^2p^4}. \end{cases}$$

Отсюда $\hat{H}(z,p) = \frac{1}{2z+3p^2}$, $q(z) = z$; $H(z,\tau,p) = \frac{1}{2z+3p^2}e^{-\tau z}$. Так как оригиналом по переменной z для $\hat{H}(z,p) = \frac{1}{2z+3p^2}$ является функция $\hat{h}(t,p) = \frac{1}{2}e^{-\frac{3}{2}p^2 t}$, то по теореме смещения получим

$$h(t,\tau,p) = \frac{1}{2}e^{-\frac{3}{2}p^2(t-\tau)}. \tag{4.3.25}$$

Для найденной ИПФ $h(t,\tau,p)$ системы (4.3.19) вычислим виртуальные входные сигналы $F_1^*(t,p)$, $F_2^*(t,p)$ так, чтобы соответствующие выходные сигналы имели вид

$$U_1^*(t,p) = \begin{cases} 1(t)v_1(p), \ t>0, \\ 0, \ t \le 0, \end{cases} \quad U_2^*(t,p) = \begin{cases} tv_1(p), \ t>0, \\ 0, \ t \le 0, \end{cases} \tag{4.3.26}$$

где $v_1(p), v_2(p)$ есть некоторые аналитические функции, для которых определено обратное преобразование Лапласа.

Искомые сигналы $F_1^*(t,p)$, $F_2^*(t,p)$ найдем из решения интегральных уравнений:

$$1(t)v_1(p) = \frac{1}{2}\int\limits_0^t e^{-\frac{3}{2}p^2(t-\tau)}F_1^*(\tau,p)d\tau, \ \ tv_2(p) = \frac{1}{2}\int\limits_0^t e^{-\frac{3}{2}p^2(t-\tau)}F_2^*(\tau,p)d\tau.$$

Полученные интегральные уравнения являются уравнениями в свертках. Решая их операционным методом, приходим к алгебраическим уравнениям относительно изображений искомых функций $F_1^*(z,p), F_2^*(z,p)$ по переменной t:

$$F_1^*(z,p)\frac{1}{2z+3p^2} = v_1(p)\frac{1}{z},$$

$$F_2^*(z,p)\frac{1}{2z+3p^2} = v_2(p)\frac{1}{z^2}.$$

Решением этих уравнений являются функции

$$F_1^*(z,p) = \left(2 + \frac{3p^2}{z}\right)v_1(p),$$

$$F_2^*(z,p) = \left(\frac{2}{z} + \frac{3p^2}{z^2}\right)v_2(p),$$

оригиналами которых являются функции $F_1^*(t,p) = \left(2\delta(t) + 3p^2\right)v_1(p)$, $F_2^*(t,p) = \left(2 + 3p^2 t\right)v_2(p)$. При $t > 0$, учитывая условие (4.3.13), получим

$$F_1^*(t,p) = 3p^2 v_1(p), F_2^*(t,p) = \left(2 + 3p^2 t\right)v_2(p). \tag{4.3.27}$$

Подставляя (4.3.26), (4.3.27) в (4.3.20), получим

$$\begin{cases} bp^2v_1(p) = 3p^2v_1(p), \\ av_2(p) + bp^2v_2(p)t = \left(2 + 3p^2t\right) v_2(p). \end{cases}$$

Откуда получим искомые коэффициенты $a = 2$, $b = 3$. Полученные коэффициенты в точности совпадают с коэффициентами уравнения (4.3.19).

4.4. Определение параметров физических процессов[3]

Одной из важных проблем при проектировании систем, обеспечивающих моделирование физических процессов, таких как колебания, вибрация, теплопроводность и т.д., является выбор параметров этих систем. На практике в ряде случаев выбор параметров систем осуществляется эмпирически, допуская некоторые ограничения и допущения, которые не всегда учитывают особенности физических процессов. Некоторые методы идентификации параметров в системах управления технологическими процессами рассмотрены в работе [33].

В данном разделе предложен метод определения параметров систем, моделирующих физические процессы, математические модели которых описываются дифференциальными уравнениями в частных производных. Изложение ведется на примере уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами

$$a(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + b(x,t)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = f(x,t), 0 \le x \le l, t \ge 0, \quad (4.4.1)$$

с начальными условиями $u(x,0)$=0 и граничными $u(0,t)$=$u(l,t)$=0 условиями.

Здесь $u(x,t)$ – выходной сигнал системы, $f(x,t)$ – входной сигнал.

В качестве параметров системы будем рассматривать коэффициенты уравнения (4.4.1), которые будут определять требуемый процесс.

Постановка задачи. Требуется определить параметры $a(x,t)$, $b(x,t)$ системы, описываемой уравнением (4.4.1) при подаче двух входных сигналов $f_i(x,t)$, $i = 1, 2$.

Решение. Поставленную задачу будем рассматривать, как задачу параметрической идентификации систем с распределенными

[3]Данный раздел написан по результатам работ [27, 108].

параметрами. Известно [46], что решение уравнения (4.4.1) можно выразить через функцию Грина $G(x,\xi,t,\tau)$ в виде

$$u(x,t)=\int\limits_0^t\int\limits_0^x G(x,\xi,t,\tau)f(\xi,\tau)d\xi d\tau, \tag{4.4.2}$$

где $t\geq 0$ – переменная времени; $0\leq x\leq l$ – пространственная переменная; $f(\xi,\tau)$ – входной сигнал; $u(x,t)$ – выходной сигнал; $G(x,\xi,t,\tau)$ – функция Грина, которая выступает как импульсная переходная функция или функция влияния системы.

Поставленную задачу будем решать в два этапа: первый – определение импульсной переходной функции $G(x,\xi,t,\tau)$ системы, описываемой уравнением (4.4.2) и второй – определение переменных коэффициентов системы, описываемой уравнением (4.4.1).

4.4.1. Определение импульсной переходной функции

Определение импульсной переходной функции проводится по аналогии с результатами предыдущего раздела. Здесь оно приводится для целостности изложения.

Определение импульсной переходной функции основано на следующем утверждении.

Теорема 4.4.1. *Пусть изображение Лапласа функции $G(x,\xi,t,\tau)$ по переменным x,t удовлетворяет условию*

$$\hat{G}(p_1,\xi,p_2,\tau)=\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty G(x,\xi,t,\tau)e^{-(p_1x+p_2t)}dxdt=$$

$$=G_0(p_1,p_2)e^{-(\xi q_1(p_1)+\tau q_2(p_2))}, \tag{4.4.3}$$

где $G_0(p_1,p_2),q_1(p_1),q_2(p_2)$ – некоторые аналитические функции в области $Re(p_k)>\sigma, k=1,2$.

Тогда изображение Лапласа уравнения

$$u(x,t)=\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty G(x,\xi,t,\tau)f(\xi,\tau)d\xi d\tau \tag{4.4.4}$$

будет иметь вид

$$U(p_1,p_2)=G_0(p_1,p_2)F(q_1(p_1),q_2(p_2)), \tag{4.4.5}$$

где $U(p_1,p_2)$ – изображение Лапласа $u(x,t)$, и $F(p_1,p_2)$ – изображение $f(x,t)$.

Доказательство. Найдем изображение уравнения (4.4.4) по переменным x, t:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty u(x,t)e^{-(p_1x+p_2t)}dxdt =$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty \left(\int_0^\infty \int_0^\infty G(x,\xi,t,\tau)\ f(\xi,\tau)d\xi d\tau)\right)e^{-(p_1x+p_2t)}dxdt. \qquad (4.4.6)$$

Меняя порядок интегрирования в интеграле справа по совокупности переменных (x,t) и (ξ,τ), получим

$$U(p_1,p_2) = \int_0^\infty \int_0^\infty f(\xi,\tau) \left(\int_0^\infty \int_0^\infty G(x,\xi,t,\tau)e^{-(p_1x+p_2t)}dxdt \right) d\xi d\tau =$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty f(\xi,\tau)\hat{G}(p_1,\xi,p_2,\tau)d\xi d\tau. \qquad (4.4.7)$$

Учитывая условие (4.4.3), (4.4.7) примет вид

$$U(p_1,p_2) = G_0(p_1,p_2) \int_0^\infty \int_0^\infty f(\xi,\tau)e^{-(\xi q_1(p_1)+\tau q_n(p_n))}d\xi d\tau.$$

Отсюда следует справедливость равенства (4.4.5), т.е.

$$U(p_1,p_2) = G_0(p_1,p_2)F(q_1(p_1),q_2(p_2)).$$

Следствие. Пусть система описывается уравнением

$$u(x,t) = \int_0^t \int_0^x G(x,\xi,t,\tau)f(\xi,\tau)d\xi d\tau, \qquad (4.4.8)$$

где $f(\xi,\tau)$ – входной сигнал системы; $u(x,t)$ – выходной сигнал системы; $G(x,\xi,t,\tau)$ – импульсная переходная функция.

Импульсная переходная функция $G(x,\xi,t,\tau)$ удовлетворяет следующим условиям: 1) условию физической реализуемости:

$$G(x,\xi,t,\tau) = 0 \text{ при } \xi > x \text{ и } \tau > t; \qquad (4.4.9)$$

2) преобразование Лапласа импульсной переходной функции $G(x,\xi,t,\tau)$ по переменным x,t удовлетворяет условию

$$\hat{G}(p_1,\xi,p_2,\tau)=\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty G(x,\xi,t,\tau)e^{-(p_1x+p_2t)}dxdt=$$

$$=G_0(p_1,p_2)e^{-(\xi q_1(p_1)+\tau q_2(p_2))}, \tag{4.4.10}$$

где $G_0(p_1,p_2), q_1(p_1), q_2(p_2)$ – некоторые аналитические функции в области $\mathrm{Re}p_k>\sigma, k=1,2$.

Тогда изображение Лапласа уравнения (4.4.8) будет иметь вид

$$U(p_1,p_2)=G_0(p_1,p_2)F(q_1(p_1),q_2(p_2)), \tag{4.4.11}$$

где $U(p_1,p_2)$ – изображение Лапласа $u(x,t)$, и $F(p_1,p_2)$ – изображение $f(x,t)$.

Замечание 4.4.1. *Рассмотренная теорема в одномерном случае является теоремой Бореля* [185]*, применение которой к идентификации одномерных систем рассмотрено в разд. 2.5.*

Постановка задачи. Требуется по известным входным сигналам $f_1(x,t)$, $f_2(x,t)$, $f_3(x,t)$ и соответствующим выходным сигналам $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$, $u_3(x,t)$ определить импульсную переходную функцию $G(x,\xi,t,\tau)$ системы (4.4.8).

Решение. По заданным функциям $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$, $u_3(x,t)$ и $f_1(x,t)$, $f_1(x,t)$, $_2(x,t)$, $f_3(x,t)$, используя соотношение (4.4.8), составим систему интегральных уравнений

$$\begin{cases} u_1(x,t)=\int\limits_0^t\int\limits_0^x G(x,\xi,t,\tau)f_1(\xi,t)d\xi d\tau, \\ u_2(x,t)=\int\limits_0^t\int\limits_0^x G(x,\xi,t,\tau)f_2(\xi,t)d\xi d\tau, \\ u_3(x,t)=\int\limits_0^t\int\limits_0^x G(x,\xi,t,\tau)f_3(\xi,t)d\xi d\tau \end{cases} \tag{4.4.12}$$

относительно искомой импульсной переходной функции $G(x,\xi,t,\tau)$. Пусть функция $G(x,\xi,t,\tau)$ удовлетворяет условиям (4.4.9), (4.4.10); тогда изображением системы интегральных уравнений (4.4.12), полученной на основании (4.4.11), будет система алгебраических уравнений

$$\begin{cases} U_1(p_1,p_2)=G_0(p_1,p_2)F_1(q_1(p_1),q_2(p_2)), \\ U_2(p_1,p_2)=G_0(p_1,p_2)F_2(q_1(p_1),q_2(p_2)), \\ U_3(p_1,p_2)=G_0(p_1,p_2)F_3(q_1(p_1),q_2(p_2)). \end{cases} \tag{4.4.13}$$

Решая систему (4.4.13) относительно искомых функций $G_0(p_1, p_2)$, $q_1(p_1)$, $q_2(p_2)$, найдем изображение импульсной перходной функции в виде

$$\hat{G}(p_1, \xi, p_2, \tau) = G_0(p_1, p_2) e^{-(\xi q_1(p_1) + \tau q_2(p_2))}.$$

Импульсную переходную фукнкцию $G(x, \xi, t, \tau)$ определим как обратное преобразование Лапласа по переменным p_1, p_2

$$G(x, \xi, t, \tau) = -\frac{1}{4\pi} \int\limits_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \int\limits_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \hat{G}(p_1, \xi, p_1, \tau) e^{(p_1 x + p_2 t)} dp_1 dp_2 =$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \int\limits_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \int\limits_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} G_0(p_1, p_1) e^{(p_1 x + p_2 t) - (\xi q_1(p_1) + \tau q_2(p_2))} dp_1 dp_2.$$

Таким образом, по трем тестовым входным и соответсвующим выходным сигналам определена импульсная переходная функция $G(x, \xi, t, \tau)$ системы, описываемой уравнением (4.4.2).

4.4.2. Определение параметров системы

Следуя методу, изложенному в разделе 4.1.3, возьмем две линейно независимые функции $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$. Используя соотношение (4.4.2), составим два интегральных уравнения для определения соответствующих входных сигналов $f_1(x, t)$ и $f_2(x, t)$:

$$u_1(x, t) = \int\limits_0^t \int\limits_0^x G(x, \xi, t, \tau) f_1(\xi, \tau) d\xi d\tau,$$

$$u_2(x, t) = \int\limits_0^t \int\limits_0^x G(x, \xi, t, \tau) f_2(\xi, \tau) d\xi d\tau. \qquad (4.4.14)$$

Из решения системы интегральных уравнений (4.4.14) найдем виртуальные сигналы $f_1(x, t)$ и $f_2(x, t)$.

Подставляя $u_1(x, t)$, $u_2(x, t)$ и $f_1(x, t)$, $f_2(x, t)$ в (4.4.1), получим систему алгебраических уравнений относительно искомых коэффициентов $a(x, t)$ и $b(x, t)$:

$$\begin{cases} a(x,t) \dfrac{\partial u_1(x,t)}{\partial t} + b(x,t) \dfrac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial x^2} = f_1(x,t), \\ a(x,t) \dfrac{\partial u_2(x,t)}{\partial t} + b(x,t) \dfrac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial x^2} = f_2(x,t). \end{cases} \qquad (4.4.15)$$

Решение системы (4.4.15) имеет вид

$$a(x,t)=\frac{\begin{vmatrix} f_1(x,t) & \dfrac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial x^2} \\ f_2(x,t) & \dfrac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial x^2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u_1(x,t)}{\partial t} & \dfrac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial u_2(x,t)}{\partial t} & \dfrac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial x^2} \end{vmatrix}},$$

$$b(x,t)=\frac{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u_1(x,t)}{\partial t} & f_1(x,t) \\ \dfrac{\partial u_2(x,t)}{\partial t} & f_2(x,t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u_1(x,t)}{\partial t} & \dfrac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial u_2(x,t)}{\partial t} & \dfrac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial x^2} \end{vmatrix}}. \qquad (4.4.16)$$

Решение (4.4.16) системы (4.4.15) будет иметь более простой вид если в качестве выходных сигналов взять $u_1(x,t)=\varphi_1(t)$ и $u_2(x,t)=\varphi_2(x)$. Тогда коэффициенты уравнения (4.4.1) будут определяться формулами

$$a(x,t)=\frac{f_1(x,t)}{\varphi_1'(t)},\ b(x,t)=\frac{f_2(x,t)}{\varphi_2''(x)}. \qquad (4.4.17)$$

В частности, если $\varphi_1(t)=t$ и $\varphi_2=x^2$, то (4.4.17) примет вид

$$a(x,t)=f_1(x,t),\ b(x,t)=\frac{1}{2}f_2(x,t).$$

Вывод

Предложеные методы определения параметров систем позволяют:

1) построить импульсную переходную функцию, которая характеризует качество переходных процессов данной системы;

2) построить ее математическую модель в виде дифференцмального уравнения в частных производных, параметры которого характеризуют функционирование данной системы.

4.5. Идентификация дискретных динамических систем с распределенными параметрами[4]

В данном разделе предлагается метод параметрической идентификации дискретных динамических систем с распределенными параметрами, описываемых разностными уравнениями

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(k)u(k+i,l)+\sum_{j=1}^{m} a_j(k)u(k,l+j)+c_0(k)u(k,l)=f(k,l), \quad k,l=0,1,2,... \tag{4.5.1}$$

с начальными условиями

$$u(0,l)=0,\ u(i,l)=0,\ \ i=1,2,...,n-1;\ \ l=0,1,2,... \tag{4.5.2}$$

и краевыми условиями

$$u(k,0)=0,\ u(k,j)=0,\ \ j=1,2,...,m-1;\ \ k=0,1,2,... \tag{4.5.3}$$

где входной и выходной сигналы $f(k,l)$ и $u(k,l)$, $k,l=0,1,2,...$; $a_i(k)$, $b_j(k)$, $i=1,2,...,n$, $j=1,2,...m$; $c_0(k)$, $k=0,1,2,...$ – коэффициенты, которые являются параметрами системы.

Одним из классов математических моделей, используемых при описании систем с распределенными параметрами, являются дифференциальные уравнения в частных производных. Например, уравнение теплопроводности, диффузии и т.д. При этом значение физического поля, которое характеризует протекание физического процесса, как правило, известно в дискретные значения времени и в определенных точках пространства. Поэтому от дифференциальных уравнений в частных производных переходят к разностным уравнениям вида (4.5.1). Коэффициенты в уравнении (4.5.1) характеризуют с некоторой погрешностью протекание физического процесса. Поэтому их определение является актуальной задачей. Восстановление параметров непрерывных систем рассмотрено в разд. 4.1.3 (для систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями) и в разд. 4.6.1, 4.6.2(для систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями и уравнениями в частных производных дробных порядков). Ниже предлагается метод восстановления параметров дискретных систем с распределенными параметрами.

Постановка задачи. Требуется, подавая два тестовых сигнала $f_1(k,l), f_2(k,l)$, $k,l=0,1,2,...$, и зная соответствующие выходные сигналы $u_1(k,l), u_2(k,l)$, $k,l=0,1,2,...$, системы (4.5.1), найти

[4]Данный раздел написан по материалам работы [31].

параметры системы $a_i(k), i = 1, 2, ..., n; b_j(k), j = 1, 2, ..., m; c_0(k)$, $k = 0, 1, 2, ...$

Рассмотрим Z-преобразования для входного и выходного сигналов по переменной l, которые определяются равенствами [158]:

$$U(k, z_1) = Z\left[u(k, l)\right] = \sum_{l=0}^{\infty} u(k, l) z_1^{-l} \text{ – для выходного сигнала,}$$

$$F(k, z_1) = Z\left[f(k, l)\right] = \sum_{l=0}^{\infty} f(k, l) z_1^{-l} \text{ – для входного сигнала.}$$

Применив к уравнению (4.5.1) с начальными условиями (4.5.2) Z-преобразование по переменной l [158], приходим к уравнению

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(k) U(k+i, z_1) + \left(b_m(k) z_1^m + ... + c_0(k)\right) U(k, z_1) = F(k, z_1).$$

Введя обозначение $a_0(k, z_1) = b_m(k) z_1^m + b_{m-1}(k) z_1^{m-1} + ... c_0(k)$, получим разностное уравнение

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(k) U(k+i, z_1) + a_0(k, z_1) U(k, z_1) = F(k, z_1) \qquad (4.5.4)$$

с начальными условиями $U(0, z_1)=0, U(k, z_1)=0, k=1, 2, ..., n-1$.

Уравнение (4.5.4) является разностным уравнением; z_1 будем рассматривать как параметр. Рассмотрим виртуальную динамическую систему, описываемую уравнением (4.5.4), где z_1 – параметр, $F(k, z_1)$, $U(k, z_1)$ – входной и выходной сигналы соответственно; $a_i(k)$, $i = 1, 2, ..., n$; $b_j(k)$, $j = 1, 2, ..., m$; $c_0(k)$ – параметры системы, подлежащие определению. Систему, описываемую уравнением (4.5.4), будем рассматривать как параметрическую систему, а импульсную переходную функцию $h(k, l, z_1)$ системы (4.5.4) – как параметрическую импульсную переходную функцию.

Поставленную задачу разобьем на две задачи.

Первая задача. Требуется, подавая два тестовых сигнала $f_1(k, l)$, $f_2(k, l)$ и зная соответствующие выходные сигналы $u_1(k, l)$, $u_2(k, l)$ системы (4.5.1), определить импульсную переходную функцию системы (4.5.4).

Решение. Определение импульсной переходной функции системы (4.5.4) основано на следующей теореме.

Теорема 4.5.1. *Пусть последовательности* $x(k), y(k)$, $k = 0, 1, 2, ...$, *связаны формулой*

$$y(k) = \sum_{l=0}^{k} g(k, l) x(l), k = 0, 1, 2, ..., \qquad (4.5.5)$$

Z-преобразование последовательности $g(k,l)$ по переменной k имеет вид

$$G(z,l) = Z\left[g(k,l)\right] = \sum_{k=0}^{\infty} g(k,l)z^{-k}$$

и удовлетворяет условию

$$G(z,l) = \hat{G}(z)\left[q(z)\right]^{-l}. \tag{4.5.6}$$

Тогда

$$Y(z) = \hat{G}(z)X(q(z)). \tag{4.5.7}$$

Доказательство. Z-преобразование выражения (4.5.5) имеет вид

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{l=0}^{\infty} g(k,l)x(l)z^{-k}\right).$$

Меняя порядок суммирования (возможность данного действия следует [157] из сходимости последовательностей $g(k,l), y(k)$ по k,l), получим

$$\begin{aligned} Y(z) = \sum_{l=0}^{\infty}\left(x(l)\sum_{k=0}^{\infty} g(k,l)z^{-k}\right) = \sum_{l=0}^{\infty} x(l)\hat{G}(z)\left[q(z)\right]^{-l} = \\ = \hat{G}(z)\sum_{l=0}^{\infty} x(l)\left[q(z)\right]^{-l} = \hat{G}(z)X(q(z)). \end{aligned}$$

Отсюда следует справедливость (4.5.7).

Следствие. В случае когда последовательность $g(k,l)$ инвариантна к сдвигу, т. е. имеет вид $g(k,l) = g(k-l)$, получаем известную теорему о Z-преобразовании свертки двух последовательностей [158], которая определяется выражением

$$y(k) = \sum_{l=0}^{k} g(k-l)x(l). \tag{4.5.8}$$

Пусть

$$X(z) = Z\left[x(k)\right] = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k},$$

$$Y(z) = Z\left[y(k)\right] = \sum_{k=0}^{\infty} y(k)z^{-k},$$

$$G(z) = Z\left[g(k)\right] = \sum_{k=0}^{\infty} g(k)z^{-k}.$$

Тогда Z-преобразование (4.5.8) имеет вид

$$Y(z) = G(z)X(z). \tag{4.5.9}$$

Действительно, так как $Z\left[g(k)\right] = G(z)$, то по теореме смещения $Z\left[g(k-l)\right] = G(z)z^{-l}$ и следовательно удовлетворяет условию (4.5.6), где $q(z) = z$, т. е. из (4.5.7) следует (4.5.9).

Приведенная теорема является аналогом теоремы Бореля для непрерывных систем, рассмотренной в разд. 2.5. Там же предложен метод идентификации непрерывных динамических систем, основанный на применении теоремы Бореля.

Следуя [129], представим связь вход–выход системы (4.5.4) уравнением

$$U(k, z_1) = \sum_{l=0}^{\infty} h(k, l, z_1)F(l, z_1) \tag{4.5.10}$$

для систем описываемых разностными уравнениями вида (4.5.4) с переменными параметрами, и уравнением

$$U(k, z_1) = \sum_{l=0}^{\infty} h(k-l, z_1)F(l, z_1) \tag{4.5.11}$$

для систем, инвариантных к сдвигу, описываемых разностными уравнениями с постоянными параметрами.

Здесь $U(k, z_1)$ – выходной сигнал, $F(k, z_1)$ – входной сигнал, $h(k, l, z_1)$ – импульсная переходная функция системы (4.5.4).

Для уравнения (4.5.10) утверждение данной теоремы примет следующий вид. Пусть Z-преобразование по переменной l функции $u(k, l)$ есть $U(k, z_1)$, для функции $f(k, l) - F(k, z_1)$ и Z-преобразования по переменной k функций $U(k, z_1)$ и $F(k, z_1)$ есть $\hat{U}(z_2, z_1), \hat{F}(z_2, z_1)$.

Пусть Z-преобразование функции $h(k, l, z_1)$ по переменной k имеет вид $Z\left[h(k, l, z_1)\right] = \sum\limits_{k=0}^{\infty} h(k, l, z_1)z_2^{-k} = H(z_2, l, z_1)$ и удовлетворяет следующему условию: Z-преобразование по переменной k имеет вид

$$H(z_2, l, z_1) = \hat{H}(z_2, z_1)\left[q(z_2)\right]^{-l}, \tag{4.5.12}$$

где функции $q(z_2)$ и $\hat{H}(z_2, z_1)$ есть некоторые аналитические функции.

Тогда Z-преобразование уравнения (4.5.10) по переменной k будет иметь вид

$$\hat{H}(z_2, z_1)\hat{F}(q(z_2), z_1) = \hat{U}(z_2, z_1). \tag{4.5.13}$$

Подавая на вход системы (4.5.1) два тестовых входных сигнала $u_1(k,l), u_2(k,l)$, получим соответствующие выходные сигналы $f_1(k,l), f_2(k,l)$. Определим их Z-преобразования по обеим переменным: $\hat{U}_1(z_2,z_1), \hat{U}_2(z_2,z_1)$, $\hat{F}_1(q(z_2),z_1)$, $\hat{F}_2(q(z_2),z_1)$.

Воспользовавшись (4.5.13), получим систему уравнений относительно функций $H(z_2,z_1), q(z_2)$:

$$\begin{cases} \hat{H}(z_2,z_1)\hat{F}_1(q(z_2),z_1) = \hat{U}_1(z_2,z_1), \\ \hat{H}(z_2,z_1)\hat{F}_2(q(z_2),z_1) = \hat{U}_2(z_2,z_1). \end{cases} \tag{4.5.14}$$

Решая данную систему, находим функции $H(z_2,z_1), q(z_2)$.

Тогда функция $h(k,l,z_1)$ определяется как обратное Z-преобразование формулой

$$h(k,l,z_1) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C H(z_2,l,z_1) z_2^{k-1} dz_2 =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C \hat{H}(z_2,z_1)\left[q(z_2)\right]^{-l} z_2^{k-1} dz_2. \tag{4.5.15}$$

Вычисляя интеграл в правой части формулы по квадратурным формулам, получаем приближенное значение импульсной переходной функции.

Отметим, что вычисление контурного интеграла в выражениях (4.5.15) является достаточно трудоемкой задачей. Поэтому для нахождения обратного Z-преобразования можно воспользоваться следующей вычислительной схемой [14], основанной на методе коллокаций.

Z-преобразование функции $h(k,l,z_1)$ по переменной k имеет вид

$$Z\left[h(k,l,z_1)\right] = \sum_{k=0}^{\infty} h(k,l,z_1) z_2^{-k} = H(z_2,l,z_2). \tag{4.5.16}$$

Рассмотрим (4.5.16) как уравнения относительно функции $h(k,l,z_1)$. Применяя метод редукции и учитывая физическую реализуемость импульсной переходной функции ($h(k,l,z_1) = 0$ при $k < l$), уравнение (4.5.16) представим в виде

$$\sum_{k=l}^{N} h(k,l,z_1) z_2^{-k} = H(z_2,l,z_1),\ l = 0,1,\ldots,N, \tag{4.5.17}$$

где N – достаточно большое число.

В уравнении (4.5.17) для каждого фиксированного значения $l = 0, 1, 2, ...N$ на окружности радиуса R, содержащей все особые точки функции $g(k, l, z_1)$: $\gamma = \{z_1 | z_1| = R\}$, выбираем $(N - l + 1)$ равностоящую точку $z_2^{(k)}, k = 0, 1, .., N - l$, и приравняем левые и правые части уравнения (4.5.17) в этих точках. В результате приходим к $(N + 1)$ системе линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=l}^{N} g(k, l, z_1) \left(z_2^{(v)}\right)^{-k} = H(z_2^{(v)}, l, z_1), \nu = 0, 1, ..., N - l, \qquad (4.5.18)$$

где $l = 0, 1, \ldots, N$. Система (4.5.18) однозначно разрешима, так как определитель l-й системы $(N - l + 1)$ порядка $(l = 0, 1, ..., N)$ есть определитель Вандермонда [137], который равен

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{\left(z_2^{(0)}\right)^l} & \dfrac{1}{\left(z_2^{(0)}\right)^{l+1}} & \cdots & \dfrac{1}{\left(z_2^{(0)}\right)^N} \\ \dfrac{1}{\left(z_2^{(1)}\right)^l} & \dfrac{1}{\left(z_2^{(1)}\right)^{l+1}} & \cdots & \dfrac{1}{\left(z_2^{(1)}\right)^N} \\ . & . & \cdots & . \\ \dfrac{1}{\left(z_2^{(N-i)}\right)^l} & \dfrac{1}{\left(z_2^{(N-i)}\right)^{l+1}} & \cdots & \dfrac{1}{\left(z_2^{(N-i)}\right)^N} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\left(z_2^{(0)} \cdots z_2^{(N-i)}\right)^l} \begin{vmatrix} 1 & \dfrac{1}{z_2^{(0)}} & \cdots & \dfrac{1}{\left(z_2^{(0)}\right)^{N-l}} \\ 1 & \dfrac{1}{z_2^{(1)}} & \cdots & \dfrac{1}{\left(z_2^{(1)}\right)^{N-l}} \\ . & . & \cdots & . \\ 1 & \dfrac{1}{z_2^{(N-i)}} & \cdots & \dfrac{1}{\left(z_2^{(N-i)}\right)^{N-l}} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\left(z_2^{(0)} \cdots z_2^{(N-i)}\right)^l} \prod_{i>j} \left(\frac{1}{z_2^{(i)}} - \frac{1}{z_2^{(j)}}\right) \neq 0.$$

Решая систему (4.5.18) при каждом значении $l = 0, 1, 2, ..., N$, находим элементы последовательности $\{h(k, l, z_1)\}$, $k = l, l+1, ..., N$.

Вторая задача. Требуется, зная ИПФ $h(k, l, z_1)$ преобразователя (4.5.4), найти параметры системы $a_i(k), i = 1, 2, ..., n$; $b_j(k)$, $j = 1, 2, ..., m$; $c_0(k)$, $k = 1, 2, ...$

Решение. Для уравнения (4.5.4) рассмотрим эквивалентное разностное уравнение

$$B_n(k,z_1)\Delta^n U(k,z_1)+B_{n-1}(k,z_1)\Delta^{n-1}U(k,z_1)+...$$

$$...+B_0(k,z_1)U(k,z_1)=F(k,z_1), \qquad (4.5.19)$$

где $\Delta^n U(k,z_1)$ есть разности n-го порядка:

$$\Delta U(k,z_1)=U(k+1,z_1)-U(k,z_1),$$
$$\Delta^2 U(k,z_1))=\Delta(\Delta U(k+1,z_1)-U(k,z_1))=$$
$$=U(k+2,z_1)-2U(k+1,z_1)+U(k,z_1),$$
$$...$$
$$\Delta^n U(k,z_1)=\Delta(\Delta^{n-1}U(k+1,z_1)-U(k,z_1))=$$
$$=\sum_{m=0}^{n}(-1)^{n-m}C_n^m U(k+m,z_1).$$

Следуя [61], можно показать, что коэффициенты уравнений (4.5.4) и (4.5.19) связаны соотношением

$$a_n(k)=B_n(k,z_1),$$
$$a_{n-1}(k)=C_{n-1}^{n-1}B_{n-1}(k,z_1)-C_n^{n-1}B_n(k,z_1)=$$
$$=B_{n-1}(k,z_1)-nB_n(k,z_1),$$
$$...$$
$$a_0(k)=B_0(k,z_1)-B_1(k,z_1)+...+(-1)^n B_n(k,z_1)=$$

$$=\sum_{m=0}^{n}(-1)^m B_m(k,z_1). \qquad (4.5.20)$$

Поэтому для определения коэффициентов $a_0(k)$, $a_1(k)$, ..., $a_n(k)$, $k=1,2,...$, уравнения (4.5.4) достаточно найти коэффициенты $B_0(k,z_1)$, $B_1(k,z_1)$, ..., $B_n(k,z_1)$, $k=1,2,...$, уравнения (4.5.19).

Для определения коэффициентов $B_0(k,z_1)$, $B_1(k,z_1)$, ..., $B_n(k,z_1)$; $k=1,2,...$, уравнения (4.5.19) по известной импульсной переходной функции $h(k,l,z_1)$, найдем виртуальные входные сигналы $F_i(k,z_1)$, $k=1,2,...$, $i=1,2,...,n+1$, так, чтобы им соответствовали выходные сигналы

$$U_i(k,z_1)=k^{(i)}V_i(z_1), i=0,...,n, \qquad (4.5.21)$$

где обобщенные степенные функции [61], [119]

$$k^{(0)}=1(k)=\begin{cases}1 & \text{при } k\geq 0,\\ 0 & \text{при } k<0,\end{cases}$$

$$k^{(1)} = \begin{cases} k & \text{при } k \geq 0, \\ 0 & \text{при } k < 0, \end{cases}$$

$$k^{(2)} = \begin{cases} k(k-1) & \text{при } k \geq 1, \\ 0 & \text{при } k < 0, \end{cases}$$

$$\ldots$$

$$k^{(n)} = \begin{cases} k(k-1)(k-2)...(k-n+1) & \text{при } k \geq n, \\ 0 & \text{при } k < 0 \end{cases}$$

удовлетворяют условиям

$$\Delta k^{(n)} = nk^{(n-1)},$$
$$\Delta^2 k^{(n)} = n(n-1)k^{(n-2)},$$
$$\ldots$$
$$\Delta^n k^{(n)} = n!k^{(0)} = n!1(k),$$

$$\Delta^{n+1} k^{(n)} = 0, \quad \text{при} \quad k > 0. \tag{4.5.22}$$

Используя импульсную переходную функцию $h(k, l, z_1)$, представим каждый из выходных сигналов (4.5.21) в виде уравнений:

$$\begin{cases} U_1(k, z_1) = \sum\limits_{l=0}^{k} H(k, l, z_1) F_1(l, z_1), \\ U_2(k, z_1) = \sum\limits_{l=0}^{k} H(k, l, z_1) F_2(l, z_1), \\ \qquad\qquad \ldots \\ U_{n+1}(k, z_1) = \sum\limits_{l=0}^{k} H(k, l, z_1) F_{n+1}(l, z_1). \end{cases} \tag{4.5.23}$$

Из решения системы уравнений (4.5.23) получим последовательности виртуальных входных сигналов $F_i(k, z_1)$, $k = 1, 2, ...$, $i = 1, 2, ..., n+1$, для каждой заданной последовательности выходных сигналов (4.5.21).

Подставляя (4.5.21) и решение системы (4.5.23) в (4.5.19) и учитывая (4.5.22), получим систему линейных уравнений для последовательного вычислений значений искомых коэффициентов $B_0(k, z_1)$, $B_1(k, z_1)$,..., $B_n(k, z_1)$, $k = 1, 2, ...$:

$$B_0(k,z_1)=F_1(k,z_1),$$
$$B_1(k,z_1)=F_2(k,z_1)-B_0(k,z_1)k^{(1)},$$
$$B_2(k,z_1)=\tfrac{1}{2!}\left(F_3(k,z_1)-2B_1(k,z_1)k^{(1)}-B_0(k,z_1)k^{(2)}\right.,$$
$$\ldots$$
$$B_n(k,z_1)=\tfrac{1}{n!}\left(F_{n+1}(k,z_1)-n(n-1)\cdot\cdots\cdot 2B_n(k,z_1)k^{(1)}-\ldots\right.$$
$$\left.-B_1(k,z_1)\Delta k^{(n)}-B_0(k,z_1)k^{(n)}\right).$$

Значения искомых коэффициентов исходного разностного уравнения (4.5.4) найдем из соотношений (4.5.20).

Для определения параметров $b_j(k), k=1,2,...,m$, $c_0(k)$ уравнения (4.5.1) воспользуемся вычисленным коэффициентом $a_0(k,z_1)$, для которого запишем выражение

$$\left(b_m(k)z_1^m+b_{m-1}(k)z_1^{m-1}+\ldots+b_1(k)z_1+c_0(k)\right)=a_0(k,z_1). \quad (4.5.24)$$

Аппроксимируя правую часть уравнения (4.5.24) полиномом степени m по степеням z_1

$$a_0(k,z_1)=A_m(k)z_1^m+A_{m-1}(k)z_1^{m-1}+\ldots+A_1(k)z_1+A_0(k) \quad (4.5.25)$$

и приравнивая коэффициенты полинома и выражения слева в уравнении (4.5.24) при одинаковых степенях z_1, вычислим искомые значения параметров $b_i(k)=A_i(k), i=1,2,...,m$, $c_0(k)=A_0(k)$.

Таким образом, восстановление коэффициентов исходного разностного уравнения (4.5.1) сводится к восстановлению параметрической импульсной переходной функции для уравнения (4.5.4), которая определяется по двум тестовым сигналам методом, описанным в разд. 4.5. Отметим, что при известной импульсной переходной функции системы для восстановления коэффициентов разностного уравнения не требуется проводить реальные испытания.

Пример 4.5.1. Рассмотрим измерительный преобразователь, функционирование которого описывается разностным уравнением:

$$a(k)u(k+1,l)+b(k)u(k,l+1)=f(k,l), \quad (4.5.26)$$

где $f(k,l)$, $u(k,l)$ – входной и выходной сигналы соответственно; $a(k)$, $b(k)$– подлежащие определению коэффициенты, характеризующие работу измерительного преобразователя. Пусть $a(k)=2$, $b(k)=3$. Требуется, найти коэффициенты уравнения (4.5.26), зная два тестовых входных и соответствующих им выходных сигнала.

Решение. Применив Z-преобразование к уравнению (4.5.26) по переменной l, получим

$$a(k)U(k+1,z_1)+b(k)z_1U(k,z_1)=F(k,z_1)$$

и, обозначая $b(k)z_1$ через $a_0(k,z_1)$, приходим к уравнению

$$a(k)U(k+1,z_1)+a_0(k,z_1)U(k,z_1)=F(k,z_1). \tag{4.5.27}$$

Определим импульсную переходную функцию $h(k,l,z_1)$ системы, описываемой уравнением (4.5.27).

В качестве входных сигналов возьмем

$$f_1(k,l)=3k+2l+5kl,$$
$$f_2(t,x)=12\cdot 2^{lk}\cdot 3^k-8\cdot 2^l-9\cdot 3^k+5,$$

им соответствуют выходные сигналы:

$$u_1(k,l)=kl,$$
$$u_2(t,x)=\left(2^l-1\right)\left(3^k-1\right).$$

Z-преобразование функций $u_1(k,l), u_2(k,l), f_1(k,l), f_2(k,l)$ по переменной l имеют вид:

– для входных сигналов:

$$F_1(k,z_1)=\frac{z_1\left(2k+3kz_1+2\right)}{\left(z_1-1\right)^2},$$

$$F_2(k,z_1)=\frac{z_1\left(3^{k+1}z_1-3z_1+2\cdot 3^{k+1}-2\right)}{\left(z_1-1\right)\left(z_1-2\right)}; \tag{4.5.28}$$

– для выходных сигналов:

$$U_1(k,z_1)=\frac{kz_1}{\left(z_1-1\right)^2},$$

$$U_2(k,z_2)=\frac{z_1\left(3^k-1\right)}{\left(z_1-1\right)\left(z_1-2\right)}. \tag{4.5.29}$$

Z-преобразование функций $F_1(k,z_1), F_2(k,z_1), U_1(k,z_1), U_2(k,z_1)$ по переменной k для выражений (4.5.28), (4.5.29) имеют вид

$$\hat{F}_1(z_2,z_1)=\frac{z_2z_1\left(2z_2+3z_1\right)}{\left(z_2-1\right)^2\left(z_1-1\right)^2},$$

$$\hat{F}_2(z_2,z_1)=\frac{2z_2z_1\left(2z_2+3z_1\right)}{\left(z_2-1\right)\left(z_2-3\right)\left(z_1-1\right)\left(z_1-2\right)}, \tag{4.5.30}$$

$$\hat{U}_1(z_2,z_1)=\frac{z_2z_1}{(z_2-1)^2(z_1-1)^2},$$
$$\hat{U}_2(z_2,z_1)=\frac{2z_2z_1}{(z_2-1)(z_2-3)(z_1-1)(z_1-2)}. \qquad (4.5.31)$$

Подставляя (4.5.30), (4.5.31) в систему уравнений (4.5.14), получим

$$\hat{H}(z_2,z_1)\frac{q(z_2)z_1\left(2q(z_2)+3z_1\right)}{(q(z_2)-1)^2(z_1-1)^2}=\frac{z_2z_1}{(z_2-1)^2(z_1-1)^2},$$

$$\hat{H}(z,p)\frac{2q(z_2)z_1\left(2q(z_2)+3z_1\right)}{(q(z_2)-1)(q(z_2)-3)(z_1-1)(z_1-2)}=$$

$$=\frac{2z_2z_1}{(z_2-1)(z_2-3)(z_1-1)(z_1-2)}.$$

Отсюда

$$\hat{H}(z_2,z_1)=\frac{1}{2z_2+3z_1},\ q(z_2)=z_2,$$

$$H(z_2,l,z_1)=\frac{1}{2z_2+3z_1}z_2^{-l}.$$

Найдем обратное Z-преобразование по переменной z_2 для функции $\hat{H}(z_2,z_1)=\frac{1}{2z_2+3z_1}$. Разложим $\hat{H}(z_2,z_1)$ в ряд Лорана:

$$\hat{H}(z_2,z_1)=\frac{1}{2z_2+3z_1}=\frac{1}{2z_2}\frac{1}{1+\left(\frac{3z_1}{2}\right)z_2^{-1}}=$$

$$=\frac{1}{2z_2}\left(1-\left(\frac{3z_1}{2}\right)z_2^{-1}+\left(\frac{3z_1}{2}\right)^2z_2^{-2}-...+(-1)^k\left(\frac{3z_1}{2}\right)^kz_2^{-k}+...\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{2}z_2^{-1}-\frac{1}{2}\left(\frac{3z_1}{2}\right)z_2^{-2}+\frac{1}{2}\left(\frac{3z_1}{2}\right)^2z_2^{-3}-...+(-1)^{k-1}\frac{1}{2}\left(\frac{3z_1}{2}\right)^{k-1}z_2^{-k}+...\right).$$

Обратное Z-преобразование для функции $\hat{H}(z_2,z_1)$ по переменной z_2 будет равно

$$\hat{h}(k,z_1)=\begin{cases}0, & k=0\ ,\\ (-1)^{k-1}\frac{1}{2}\left(\frac{3z_1}{2}\right)^{k-1}, & k=1,2,...\end{cases}$$

По теореме смещения обратное Z-преобразование для функции

$$H(z_2,l,z_1)=\frac{1}{2z_2+3z_1}z_2^{-l}$$

будет определяться

$$Z^{-1}\left[H(z_2,l,z_1)\right]=Z^{-1}\left[\hat{h}(k-l,z_1)\right],$$

т.е.

$$h(k,l,z_1){=}h(k-l,z_1){=}\begin{cases}0,\ k=l,\\ (-1)^{k-l-1}\frac{1}{2}\left(\frac{3z_1}{2}\right)^{k-1-1},\ k{>}l, k{=}1,2,...,\end{cases}$$

$$U(k,z_1)=\frac{1}{2}\sum_{l=0}^{k-1}(-1)^{k-l-1}\left(\frac{3z_1}{2}\right)^{k-l-1}F(l,z_1).$$

Для определения коэффициентов уравнения (4.5.27) рассмотрим эквивалентное конечно-разностное уравнение

$$B_1(k,z_1)\Delta U(k+1,z_1)+B_0(k,z_1)U(k,z_1)=F(k,z_1). \qquad (4.5.32)$$

Коэффициенты уравнения связаны соотношениями (4.5.20) и в данном случае имеют вид

$$\begin{cases}a(k,z_1)=B_1(k,z_1),\\ a_0(k,z_1)=B_0(k,z_1)-B_1(k,z_1).\end{cases} \qquad (4.5.33)$$

Для найденной импульсной переходной функции $h(k-l,z_1)$ системы (4.5.27) вычислим виртуальные входные сигналы $F_1(k,z_1)$, $F_2(k,z_1)$ так, чтобы соответствующие выходные сигналы имели вид:

$$\begin{gathered}U_1(k,z_1)=\begin{cases}1(k)v_1(z_1),\ k\geq 0,\\ 0,\ k<0,\end{cases}\\ U_2(t,p)=\begin{cases}kv_2(z_1),\ k\geq 0,\\ 0,\ k<0,\end{cases}\end{gathered} \qquad (4.5.34)$$

где $v_1(z_1), v_2(z_1)$ – некоторые аналитические функции, для которых определено обратное Z-преобразование.

Искомые последовательности $F_1(k,z_1), F_2(k,z_1)$ найдем из решения уравнений

$$1(k)v_1(z_1)=\frac{1}{2}\sum_{l=0}^{k-1}(-1)^{k-l-1}\left(\frac{3z_1}{2}\right)^{k-l-1}F(l,z_1),$$

$$kv_2(z_1)=\frac{1}{2}\sum_{l=0}^{k-1}(-1)^{k-l-1}\left(\frac{3z_1}{2}\right)^{k-l-1}F(l,z_1).$$

Найдем решение первого уравнения.

При $k=1$ получим $2v_1(z_1)=F(0,z_1)$.

При $k=2$ получим $2v_1(z_1)=-\left(\frac{3z_1}{2}\right)F(0,z_1)+F(1,z_1)$, откуда $F(1,z_1)=2v_1(z_1)+3z_1v_1(z_1)$ или

$$F(1,z_1)=(2+3z_1)\,v_1(z_1).$$

При $k=3$ получим

$$2v_1(z_1)=\left(\frac{3z_1}{2}\right)^2F(0,z_1)-\left(\frac{3z_1}{2}\right)F(1,z_1)+F(2,z_1),$$

откуда

$$F(2,z_1)=2v_1(z_1)-\left(\frac{3z_1}{2}\right)^2 2+\left(\frac{3z_1}{2}\right)(2+3z_1)\,v_1(z_1)$$

или

$$F(2,z_1)=(2+3z_1)\,v_1(z_1).$$

По индукции имеем

$$F(k,z_1)=(2+3z_1)\,v_1(z_1).$$

Решением первого уравнения будет последовательность

$$F(k,z_1)=\begin{cases}2, & k=0,\\ (2+3z_1)\,v_1(z_1), & k=1,2,...\end{cases}\qquad(4.5.35)$$

Найдем решение второго уравнения.

При $k=1$ получим $2v_2(z_1)=F(0,z_1)$.

При $k=2$ получим $2\cdot 2v_2(z_1)=-\left(\frac{3z_1}{2}\right)F(0,z_1)+F(1,z_1)$, откуда $F(1,z_1)=2\cdot 2v_2(z_1)+3z_1v_2(z_1)$ или

$$F(1,z_1)=(2\cdot 2+3z_1)\,v_2(z_1).$$

При $k=3$ получим

$$2\cdot 3v_2(z_1)=\left(\frac{3z_1}{2}\right)^2F(0,z_1)-\left(\frac{3z_1}{2}\right)F(1,z_1)+F(2,z_1),$$

откуда

$$F(2,z_1)=2\cdot 3v_2(z_1)-\left(\frac{3z_1}{2}\right)^2 2+\left(\frac{3z_1}{2}\right)(2\cdot 2+3z_1)\,v_2(z_1)$$

или

$$F(2,z_1)=(2\cdot 3+2\cdot 3z_1)\,v_1(z_1).$$

По ииндукции имеем

$$F(k, z_1) = (2k + (k-1)3z_1)\, v_1(z_1), \quad k = 1, 2, ...,$$

или заменяя $k-1$ на k, получим решение второго уравнения

$$F(k, z_1) = (2k + 3kz_1 + 2)\, v_1(z_1), k = 0, 1, 2, ... \tag{4.5.36}$$

Подставляя (4.5.34), (4.5.35), (4.5.36) в (4.5.32), получим систему уравнений

$$\begin{cases} B_0(k, z_1) = 2 + 3z_1, \\ B_1(k, z_1) + B_0(k, z_1)k = 2k + 3kz_1 + 2, \end{cases} \quad k = 1, 2, ...$$

Отсюда $B_0(k) = 2 + 3z_1$, $B_1(k) = 2, k = 1, 2, ...$ Используя соотношение (4.5.30), найдем коэффициенты $a_0(k, z_1), a(k)$:

$$\begin{cases} a(k) = B_1(k) = 2, \\ a_0(k, z_1) = B_0(k) - B_1(k) = 3z_1. \end{cases}$$

Следовательно, коэффициенты уравнения (4.5.20) равны $a(k) = 2$, $b(k) = 3$, что совпадает с точными значениями.

4.6. Параметрическая идентификация эредитарных систем[5]

При исследовании многих динамических систем, когда поведение системы определяется не только мгновенными значениями ее составляющих, но и состоянием системы в предшествующие промежутки времени, возникает задача учета последействий.

Динамические процессы с последствиями в последнее время активно исследуются в различных разделах техники, физики, экологии и биологии и получили общее название эредитарных. Учет эредитарности процессов позволяет выявить многие ранее неизвестные свойства динамических систем, а современное состояние вычислительной техники и численных методов позволяет их успешно моделировать. Этими обстоятельствами объясняется активное изучение теории эредитарных процессов в настоящее время. Подробное изложение теории и основные приложения эредитарных процессов содержатся в книгах [124, 146, 172].

[5]Данный раздел написан по материалам работ [29, 30].

В большинстве случаев эредитарные процессы описываются дифференциальными уравнениями с дробными производными. Помимо указанных выше книг, имеется большое число публикаций, в которых решается прямая задача – исследование динамического процесса при известных параметрах. Авторам неизвестны работы, в которых исследуется идентификация систем, описываемых уравнениями с дробными производными. Этому вопросу посвящен данный раздел. Отметим, что идентификация систем, описываемых производными целого порядка, рассматривалась в работах [14, 26, 138].

4.6.1. Динамические системы, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями с дробными производными

Рассмотрим динамические системы, описываемые дифференциальными уравнениями с дробными производными

$$\sum_{k=1}^{n} A_k D_{0t}^{\alpha_k} y(t) = x(t) \tag{4.6.1}$$

и с начальными условиями

$$D_{0t}^{\alpha_k - j} y(t) = b_{kj}, k = 1, 2, ..., n; j = 1, 2, ..., m_k; m_k = [\alpha_k] + 1. \tag{4.6.2}$$

Здесь [172]:

$$D_{0t}^{\alpha_k} y(t) = \frac{1}{\Gamma(m_k - \alpha_k)} \frac{d^{m_k}}{dt^{m_k}} \int_0^t \frac{y(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha_k - m_k + 1}} d\tau,\ k = 1, 2, ..., n.$$

Будем считать, что параметры системы удовлетворяют условиям $\alpha_k > 0, m_k - 1 < \alpha_k \leq m_k, A_k \in R, k = 1, 2, ..., n$.

Постановка задачи. Требуется, зная входной $x(t)$ и соответствующий выходной $y(t)$ сигналы системы, найти ее параметры α_k, $A_k \in R,\ k = 1, 2,\ ...,\ n$.

Решение. Решение поставленной задачи основано на применении метода наименьших квадратов для минимизации функционалов от полиномов с неизвестными коэффициентами и дробными показателями в спектральной области.

Преобразование Лапласа для производной дробного порядка имеет вид [172]:

$$L\left[D_{0t}^{\alpha} y(t)\right] = p^{\alpha} Y(p) - \sum_{j=1}^{n} b_j p^{j-1},$$

где $Y(p) = \int\limits_0^{+\infty} y(t)e^{-pt}dp$ – преобразование Лапласа функции $y(t)$ в области $\mathrm{Re}p > \sigma$, в которой функция $Y(p)$ является аналитической; $b_j = D_{0t}^{\alpha-j}y$, $j = 1, 2, ..., n, n = [\alpha] + 1$, – значения производных соответствующих порядков функции $y(t)$ при $t = 0$.

Применив преобразование Лапласа к уравнению (4.6.1) с начальными условиями (4.6.2), получим

$$Y(p)\sum_{k=1}^{n} A_k p^{\alpha_k} - \sum_{k=1}^{n} A_k \sum_{j=1}^{m_k} b_{kj} p^{j-1} = X(p).$$

Отсюда при значениях p таких, что $Y(p) \neq 0$ и $\mathrm{Re}p > \sigma$, имеем

$$\sum_{k=1}^{n} A_k p^{\alpha_k} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} A_k \sum\limits_{j=1}^{m_k} b_{kj} p^{j-1}}{Y(p)} + \frac{X(p)}{Y(p)}. \qquad (4.6.3)$$

Эта формула положена в основу алгоритма определения параметров α_k, $A_k, k = 1, 2, ..., n$.

Вначале рассмотрим частные случаи.

Первый частный случай. Требуется, зная входной сигнал $x(t)$, соответствующий выходной сигнал $y(t)$ системы (4.6.1) и коэффициенты $A_k \in R$, $k = 1, 2, ..., n$, найти дробные показатели $\alpha_k, k = 1, 2, ..., n$.

Правую часть формулы (4.6.3) обозначим через

$$F(p) = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} A_k \sum\limits_{j=1}^{m_k} b_{kj} p^{j-1}}{Y(p)} + \frac{X(p)}{Y(p)}.$$

Функцию $F(p)$ аппроксимируем выражением $F_1(p) = \sum\limits_{k=1}^{n} A_k p^{\beta_k}$ с неизвестными параметрами $\beta_k, k = 1, 2, ..., n$, значения которых найдем методом наименьших квадратов на сегменте $\Delta = [a, b]$. Сегмент $[a, b]$ расположен в области $[C, +\infty)$, $C = \max(c_1, c_2)$. Значения c_1, c_2 определяются из следующих условий:

$$\begin{gathered} \text{функция } X(p) \text{ аналитическая при } \mathrm{Re}p \geq c_1, \\ \text{функция } Y(p) \text{ аналитическая при } \mathrm{Re}p \geq c_2, \\ \text{причем } Y(p) \neq 0 \text{ при } \mathrm{Re}p \in [a, b]. \end{gathered} \qquad (4.6.4)$$

На сегменте $[a,b]$ введем узлы $t_k = a + \frac{b-a}{N}k, k = 1,2,...,N.$ Определим функционал $\Phi(\beta_1,\beta_2,...,\beta_n) = \sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{k=1}^{n} A_k t_i^{\beta_k} - F(t_i)\right)^2.$ Значения искомых коэффициентов $\beta_1,\beta_2,...,\beta_n$ будем искать из условия

$$\Phi(\beta_1,\beta_2,...,\beta_n) \to \min.$$

Необходимое условие минимума имеет вид $\frac{\partial\Phi}{\partial\beta_j} = 0, j = 1,2,...,n.$

В результате получим систему уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} A_k \sum_{i=1}^{N} t_i^{\beta_k+\beta_j}\ln t_i = \sum_{i=1}^{N} F(t_i)\, t_i^{\beta_j}\ln t_i, \quad j = 1,2,...,n.$$

Решая данную систему, находим значения β_k, $k = 1, 2, ..., n$, которые являются приближенными значениями искомых дробных показателей α_k, $k = 1, 2, ..., n$.

Второй частный случай. Требуется, зная входной сигнал $x(t)$ и соответствующий выходной сигнал $y(t)$ системы (4.6.1) с нулевыми начальными условиями $b_{kj} = 0$, $k = 1, 2, ..., n; j = 1, 2, ..., m_k$; $m_k = [\alpha_k] + 1$, найти коэффициенты $A_k \in R, k = 1,2,...,n$, и дробные показатели $\alpha_k, k = 1,2,...,n$.

В данном случае выражение (4.6.3) будет иметь вид

$$\sum_{k=1}^{n} A_k p^{\alpha_k} = \frac{X(p)}{Y(p)}.$$

По данному выражению определим функцию $F(p)=\frac{X(p)}{Y(p)}$, которую аппроксимируем выражением $F_1(p)=\sum_{k=1}^{n} B_k p^{\beta_k}$ с неизвестными параметрами $B_k, \beta_k, k = 1,2,...,n$. Для нахождения неизвестных параметров воспользуемся методом наименьших квадратов на сегменте $\Delta = \mathrm{Re}p \in [a,b]$. Сегмент $[a,b]$ определяется условиями (4.6.4).

На сегменте $[a,b]$ введем узлы $t_k = a + \frac{b-a}{N}k, k = 1,2,...,N.$ Определим функционал

$$\Phi(B_1,B_2,...,B_n,\beta_1,\beta_2,...,\beta_n) = \sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{k=1}^{n} B_k t_i^{\beta_k} - F(t_i)\right)^2.$$

Значения искомых коэффициентов $B_1, B_2, ..., B_n, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$ будем искать из условия $\Phi\left(B_1, B_2, ..., B_n, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_n\right) \to \min$.

Необходимыми условиями минимума функционала

$$\Phi\left(B_1, B_2, ..., B_n, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_n\right)$$

является решение системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial \beta_j} = 0, j = 1, 2, ..., n, \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial B_j} = 0, j = 1, 2, ..., n. \end{cases}$$

Проделывая очевидные выкладки, имеем

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n} B_k \sum\limits_{k=1}^{n} t_i^{\beta_k + \beta_j} = \sum\limits_{k=1}^{n} F(t_i) t_i^{\beta_k}, j = 1, 2, ..., n, \\ \sum\limits_{k=1}^{n} B_k \sum\limits_{k=1}^{n} t_i^{\beta_k + \beta_j} \ln(t_i) = \sum\limits_{k=1}^{n} F(t_i) t_i^{\beta_k} \ln(t_i), j = 1, 2, ..., n. \end{cases}$$

Решая данную систему относительно неизвестных B_1, $B_2, ..., B_n$, β_1, $\beta_2, ..., \beta_n$, получим приближенные значения искомых неизвестных A_1, $A_2, ..., A_n$, α_1, $\alpha_2, ..., \alpha_n$.

Третий частный случай. Требуется, зная входной сигнал $x(t)$, соответствующий выходной сигнал $y(t)$ и дробные показатели α_k, $k = 1, 2$, ..., n, системы (4.6.1) с начальными условиями (4.6.2), найти коэффициенты $A_k \in R, k = 1, 2, ..., n$.

Как и выше, задачу Коши (4.6.1), (4.6.2) приведем к уравнению (4.6.3). Обозначим через $F(A_1, A_2, ..., A_n, p)$ функцию

$$F(A_1, A_2, ..., A_n, p) = \sum_{k=1}^{n} A_k p^{\alpha_k} - \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} A_k \sum\limits_{j=1}^{m_k} b_{kj} p^{j-1}}{Y(p)} - \frac{X(p)}{Y(p)}.$$

На сегменте $[a, b]$ (сегмент $[a, b]$ удовлетворяет условиям (4.6.4)) введем узлы $t_k = a + \dfrac{b-a}{N} k, k = 1, 2, ..., N$. Определим функционал

$$\Phi\left(B_1, B_2, ..., B_n\right) = \sum_{i=1}^{N} \left(F\left(B_1, B_2, ..., B_n, t_i\right)\right)^2.$$

Значения параметров $B_1, B_2, ..., B_n$, найдем из условия минимума функционала

$$\Phi\left(B_1, B_2, ..., B_n\right) \to \min.$$

Необходимым условием минимума функционала $\Phi(B_1, B_2, ..., B_n)$ является решение системы уравнений $\dfrac{\partial \Phi}{\partial B_j} = 0,\ j = 1, 2, ..., n,$ которая в подробной записи имеет вид

$$\begin{cases} B_n \sum\limits_{i=1}^{N} \varphi_n^2(t_i) + B_{n-1} \sum\limits_{i=1}^{N} \varphi_{n-1}(t_i)\varphi_n(t_i) + ... \\ ... + B_1 \sum\limits_{i=1}^{N} \varphi_1(t_i)\varphi_n(t_i) = \sum\limits_{i=1}^{N} \dfrac{X(t_i)}{Y(t_i)}\varphi_n(t_i), \\ B_n \sum\limits_{i=1}^{N} \varphi_n(t_i)\varphi_{n-1}(t_i) + B_{n-1} \sum\limits_{i=1}^{N} \varphi_{n-1}^2(t_i) + ... \\ ... + B_1 \sum\limits_{i=1}^{N} \varphi_1(t_i)\varphi_{n-1}(t_i) = \sum\limits_{i=1}^{N} \dfrac{X(t_i)}{Y(t_i)}\varphi_{n-1}(t_i), \\ ... \\ B_n \sum\limits_{i=1}^{N} \varphi_n(t_i)\varphi_1(t_i) + B_{n-1} \sum\limits_{i=1}^{N} \varphi_{n-1}(t_i)\varphi_1(t_i) + ... \\ ... + B_1 \sum\limits_{i=1}^{N} \varphi_1^2(t_i) = \sum\limits_{i=1}^{N} \dfrac{X(t_i)}{Y(t_i)}\varphi_1(t_i), \end{cases}$$

где $\varphi_k(t_i) = t_i^{\alpha_k} - \dfrac{\sum_{j=1}^{m_k} b_{kj} t_i^{j-1}}{Y(t_i)},\ k = 1, 2, ..., n.$

Решив данную систему уравнений относительно неизвестных B_1, B_2, ..., B_n, получим приближенные значения искомых неизвестных A_1, A_2, ..., A_n.

Замечание 4.6.1. *Если $\alpha_k \in N, k = 1, 2, ..., n$, то задача Коши* (4.6.1), (4.6.2) *для дифференциального уравнения с дробной производной переходит в задачу Коши*

$$A_n \frac{d^n y}{dt^n} + A_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + ... + A_1 \frac{dy}{dt} + A_0 y = x(t),$$

$$y(0) = b_1, y'(0) = b_1, ..., y^{(n-1)}(0) = b_n$$

для обыкновенного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

Тогда выражение (4.6.3) примет вид

$$A_n p^n + A_{n-1} p^{n-1} + ... + A_1 p + A_0 = \frac{\sum_{k=0}^{n} A_k \sum_{j=1}^{n} b_j p^{j-1}}{Y(p)} + \frac{X(p)}{Y(p)}.$$

Используя данное выражение, определим функцию

$$F\left(B_0, B_1, ..., B_n, p\right) = \sum_{k=0}^{n} B_k p^k - \frac{\sum_{k=0}^{n} B_k \sum_{j=1}^{n} b_j p^{j-1}}{Y(p)} - \frac{X(p)}{Y(p)}.$$

На сегменте $[a, b]$ (сегмент $[a, b]$ удовлетворяет условиям (4.6.4)) введем узлы $t_k = a + \frac{b-a}{N}k, k = 1, 2, ..., N$. Определим функционал

$$\Phi\left(B_0, B_1, ..., B_n\right) = \sum_{i=1}^{N} \left(F\left(B_0, B_1, ..., B_n, t_i\right)\right)^2.$$

Значения параметров $B_0, B_1, ..., B_n$, найдем из условия минимума функционала

$$\Phi\left(B_0, B_1, ..., B_n\right) \to \min.$$

Необходимое условие минимума функционала $\Phi\left(B_0, B_1, ..., B_n\right)$ имеет вид $\dfrac{\partial \Phi}{\partial B_j} = 0,\ j = 0, 1, ..., n$. Таким образом, значения искомых параметров $B_0, B_1, ..., B_n$ находим из решения системы линейных уравнений

$$\begin{cases} B_n \sum\limits_{i=1}^{N} \varphi_n^2\left(t_i\right) + B_{n-1} \sum\limits_{i=1}^{N} \varphi_{n-1}\left(t_i\right)\varphi_n\left(t_i\right) + ... \\ ... + B_0 \sum\limits_{i=1}^{N} \varphi_0\left(t_i\right)\varphi_n\left(t_i\right) \sum\limits_{i=1}^{N} \dfrac{X\left(t_i\right)}{Y\left(t_i\right)}\varphi_n\left(t_i\right), \\ B_n \sum\limits_{i=1}^{N} \varphi_n\left(t_i\right)\varphi_{n-1}\left(t_i\right) + B_{n-1} \sum\limits_{i=1}^{N} \varphi_{n-1}^2\left(t_i\right) + ... \\ ... + B_0 \sum\limits_{i=1}^{N} \varphi_0\left(t_i\right)\varphi_{n-1}\left(t_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{N} \dfrac{X\left(t_i\right)}{Y\left(t_i\right)}\varphi_{n-1}\left(t_i\right), \\ ... \\ B_n \sum\limits_{i=1}^{N} \varphi_n\left(t_i\right)\varphi_0\left(t_i\right) + B_{n-1} \sum\limits_{i=1}^{N} \varphi_{n-1}\left(t_i\right)\varphi_0\left(t_i\right) + ... \\ ... + B_0 \sum\limits_{i=1}^{N} \varphi_0^2\left(t_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{N} \dfrac{X\left(t_i\right)}{Y\left(t_i\right)}\varphi_0\left(t_i\right), \end{cases}$$

$$\varphi_k\left(t_i\right) = t_i^k - \frac{\sum_{j=1}^{n} b_j t_i^{j-1}}{Y\left(t_i\right)}, k = 0, 1, ..., n.$$

Решив данную систему уравнений относительно неизвестных $B_0, B_1, ..., B_n$, получим приближенные значения искомых неизвестных $A_0, A_1, ..., A_n$.

Пример 4.6.1. Рассмотрим динамическую систему, описываемую уравнением

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = x(t)$$

с начальными условиями $y(0) = -1$, $y'(0) = 1$.

Здесь искомые коэффициенты равны $a_2 = 1, a_1 = 4, a_0 = 4$.

Решение. При входном воздействии $x(t) = e^{-2t}(\cos t + 2\sin t)$ выходной сигнал равен $y(t) = -e^{-2t}\cos t - 4e^{-2t}\sin t - te^{-2t}$.

Применяя описанный выше метод, находим значения $b_2 = 1$, $b_1 = 4$, $b_0 = 4$, которые совпадают с точными значениями a_2, a_1, a_0.

Общий случай. Требуется, зная входной сигнал $x(t)$ и соответствующий выходной сигнал $y(t)$ системы (4.6.1) с начальными условиями (4.6.2), найти дробные показатели $\alpha_k, k = 1, 2, ..., n$, и коэффициенты $A_k \in R, k = 1, 2, ..., n$.

Воспользовавшись выражением (4.6.3), введем функцию

$$F(A_1, A_2, ..., A_n, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, p) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} A_k p^{\alpha_k} - \frac{\sum_{k=1}^{n} A_k \sum_{j=1}^{m_k} b_{kj} p^{j-1}}{Y(p)} - \frac{X(p)}{Y(p)}.$$

На сегменте $[a, b]$ (сегмент $[a, b]$ удовлетворяет условиям (4.6.4)) введем узлы

$$t_k = a + \frac{b-a}{N}k, k = 1, 2, ..., N.$$

Определим функционал

$$\Phi\left(B_1, B_2, ..., B_n, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_n\right) = \sum_{i=1}^{N} \left(F\left(B_1, B_2, ..., B_n, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_n t_i\right)\right)^2 .$$

Значения параметров $B_1, B_2, ..., B_n$, $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$ найдем из условия минимума функционала

$$\Phi\left(B_1, B_2, ..., B_n, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_n\right) \to \min .$$

Необходимым условием минимума функционала

$$\Phi\left(B_1, B_2, ..., B_n, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_n\right)$$

является решение системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial B_j} = 0, j = 1, 2, ..., n, \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial \beta_j} = 0, j = 1, 2, ..., n. \end{cases}$$

Из этого условия получим систему уравнений для определения искомых параметров $B_1, B_2, ..., B_n,\ \beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$:

$$\begin{cases} B_n \sum\limits_{i=1}^{N} \varphi_n^2(t_i) + B_{n-1} \sum\limits_{i=1}^{N} \varphi_{n-1}(t_i)\varphi_n(t_i) + ... \\ ... + B_1 \sum\limits_{i=1}^{N} \varphi_1(t_i)\varphi_n(t_i) = \sum\limits_{i=1}^{N} \dfrac{X(t_i)}{Y(t_i)}\varphi_n(t_i), \\ B_n \sum\limits_{i=1}^{N} \varphi_n(t_i)\varphi_{n-1}(t_i) + B_{n-1} \sum\limits_{i=1}^{N} \varphi_{n-1}^2(t_i) + ... \\ ... + B_1 \sum\limits_{i=1}^{N} \varphi_1(t_i)\varphi_{n-1}(t_i) = \sum\limits_{i=1}^{N} \dfrac{X(t_i)}{Y(t_i)}\varphi_{n-1}(t_i), \\ ... \\ B_n \sum\limits_{i=1}^{N} \varphi_n(t_i)\varphi_1(t_i) + B_{n-1} \sum\limits_{i=1}^{N} \varphi_{n-1}(t_i)\varphi_1(t_i) + ... \\ ... + B_1 \sum\limits_{i=1}^{N} \varphi_1^2(t_i) = \sum\limits_{i=1}^{N} \dfrac{X(t_i)}{Y(t_i)}\varphi_1(t_i), \\ B_n \sum\limits_{i=1}^{N} \omega_n^2(t_i) + B_{n-1} \sum\limits_{i=1}^{N} \omega_{n-1}(t_i)\varphi_n(t_i) + ... \\ ... + B_1 \sum\limits_{i=1}^{N} \omega_1(t_i)\omega_n(t_i) = \sum\limits_{i=1}^{N} \dfrac{X(t_i)}{Y(t_i)}\omega_n(t_i), \\ B_n \sum\limits_{i=1}^{N} \omega_n(t_i)\varphi_{n-1}(t_i) + B_{n-1} \sum\limits_{i=1}^{N} \omega_{n-1}^2(t_i) + ... \\ ... + B_1 \sum\limits_{i=1}^{N} \omega_1(t_i)\omega_{n-1}(t_i) = \sum\limits_{i=1}^{N} \dfrac{X(t_i)}{Y(t_i)}\omega_{n-1}(t_i), \\ ... \\ B_n \sum\limits_{i=1}^{N} \omega_n(t_i)\varphi_1(t_i) + B_{n-1} \sum\limits_{i=1}^{N} \omega_{n-1}(t_i)\varphi_1(t_i) + ... \\ ... + B_1 \sum\limits_{i=1}^{N} \omega_1^2(t_i) = \sum\limits_{i=1}^{N} \dfrac{X(t_i)}{Y(t_i)}\omega_1(t_i). \end{cases}$$

где

$$\varphi_k(t_i) = t_i^{\beta_k} - \frac{\sum_{j=1}^{m_k} b_{kj} t_i^{j-1}}{Y(t_i)},$$
$$k = 1, 2, ..., n,$$
$$\omega_k(t_i) = \left(t_i^{\beta_k} - \frac{\sum_{j=1}^{m_k} b_{kj} t_i^{j-1}}{Y(t_i)} \right) t_i^{\beta_k} \ln t_i,$$
$$k = 1, 2, ..., n,$$

Решив эту систему относительно неизвестных B_1, $B_2, ..., B_n$, β_1, $\beta_2, ..., \beta_n$, получим приближенные значения искомых неизвестных A_1, $A_2, ..., A_n$, α_1, $\alpha_2, ..., \alpha_n$.

Рассмотрим частные случаи уравнения (4.6.1).

1. Рассмотрим динамические системы, описываемые задачей Коши для дифференциальных уравнений с дробной производной:

$$D_{0t}^{\alpha} y - \lambda y = x(t), \tag{4.6.5}$$

$$D_{0t}^{\alpha-k} y = b_k, k = 1, 2, ..., m = [\alpha] + 1, \tag{4.6.6}$$

где $D_{0t}^{\alpha} y = \dfrac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \dfrac{d^m}{dt^m} \displaystyle\int_0^t \frac{y(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-m+1}} d\tau.$

Пусть $\alpha > 0, m-1 < \alpha \leq m, \lambda \in R$.

Постановка задачи. Требуется, зная входной сигнал $x(t)$ и соответствующий выходной сигнал $y(t)$ системы, найти ее параметры α, λ.

Решение. Для заданных входного $x(t)$ и соответствующего ему выходного $y(t)$ сигналов системы изображение Лапласа уравнения (4.6.5) с начальными условиями (4.6.6) будет иметь вид

$$p^{\alpha} Y(p) - b_1 - p b_2 - ... - p^m b_m - \lambda Y(p) = X(p).$$

Отсюда

$$p^{\alpha} - \lambda = \frac{b_1 + p b_2 + ... + p^m b_m}{Y(p)} + \frac{X(p)}{Y(p)}. \tag{4.6.7}$$

Введем функцию $F(p) = \dfrac{b_1 + p b_2 + ... + p^m b_m}{Y(p)} + \dfrac{X(p)}{Y(p)}$, которую аппроксимируем двучленом $F_2(p) = p^{\beta} - b$.

На сегменте $[a, b]$ (сегмент $[a, b]$ удовлетворяет условиям (4.6.4)) введем узлы $t_i = a + \frac{b-a}{N} i, i = 1, 2, ..., N$. Определим функционал

$$\Phi(\beta, b) = \sum_{i=1}^{N} \left(t_i^{\beta} - b - F(t_i) \right)^2.$$

Значения искомых параметров β, b найдем из условия

$$\Phi(\beta, b) \to \min.$$

Это условие приводит к системе уравнений

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{N} t_i^{\beta} - bN = \sum\limits_{i=1}^{N} F(t_i), \\ \sum\limits_{i=1}^{N} t_i^{2\beta} \ln(t_i) - b \sum\limits_{i=1}^{N} t_i^{\beta} \ln(t_i) = \sum\limits_{i=1}^{N} F(t_i)\, t_i^{\beta} \ln(t_i). \end{cases}$$

Решив данную систему, находим параметры β, b, которые являются приближенными значениями искомых значений α, λ.

Приведем примеры.

Пример 4.6.2. Рассмотрим динамическую систему, описываемую задачей Коши (4.6.5), (4.6.6) при $\alpha = \frac{1}{2}, \lambda = 5$:

$$D_{0t}^{\frac{1}{2}} y - 5y = x(t) \tag{4.6.8}$$

и при начальном условии

$$D_{0t}^{-\frac{1}{2}} y = 0. \tag{4.6.9}$$

Решение. Решением задачи Коши (4.6.8), (4.6.9) при входном воздействии $x(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot 1(t) - 5\sqrt{t}$ будет функция (выходной сигнал) $y(t) = \sqrt{t} \cdot 1(t)$. Действительно, решением уравнения Абеля [119, с. 253]

$$\int_0^t \frac{y(t)}{(t-\tau)^{\alpha}} dt = t^n \tag{4.6.10}$$

является функция

$$y_1(t) = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(1-\alpha)\,\Gamma(n+\alpha)} t^{n+\alpha-1}. \tag{4.6.11}$$

Из (4.6.10), (4.6.11) имеем $\dfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \displaystyle\int_0^t \frac{y_1(t)}{(t-\tau)^{\alpha}} dt = \frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(n+1)} t^n.$

При $\alpha = \frac{1}{2}, n = 1$ получим $y_1(t) = \sqrt{t}$. Кроме того,

$$D_{0t}^{\frac{1}{2}} y_1 = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(2)} \frac{d}{dt} t = \frac{\sqrt{\pi}}{2} 1(t).$$

Подставляя $y(t)=\sqrt{t}, D_{0t}^{\frac{1}{2}}y(t)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}1(t), x(t)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}1(t)-5\sqrt{t}$ в уравнение (4.6.8), получаем верное тождество и $D_{0t}^{-\frac{1}{2}}y=0$.

Изображения $x(t)$, $y(t)$ имеют вид

$$X(p)=\frac{\sqrt{\pi}}{2p^{\frac{3}{2}}}\left(p^{\frac{1}{2}}-5\right) \quad \text{и} \quad Y(p)=\frac{\sqrt{\pi}}{2p^{\frac{3}{2}}}.$$

Подставляя данные изображения в (4.6.7), получим

$$p^{\alpha}-\lambda=p^{\frac{1}{2}}-5.$$

Отсюда находим параметры системы $\alpha=\frac{1}{2}$, $\lambda=5$.

2. Рассмотрим динамические системы, описываемые дифференциальными уравнениями с дробной производной

$$D_{0t}^{\alpha}y+\mu D_{0t}^{\beta}y+\lambda y=x(t) \tag{4.6.12}$$

и с начальными условиями

$$\begin{cases} D_{0t}^{\alpha-k}y=a_k, k=1,2,...,n=[\alpha]+1, \\ D_{0t}^{\beta-k}y=a_k, k=1,2,...,m=[\beta]+1, \end{cases} \tag{4.6.13}$$

здесь

$$D_{0t}^{\alpha}y=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dt^n}\int\limits_0^t\frac{y(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}}d\tau,$$

$$D_{0t}^{\beta}y=\frac{1}{\Gamma(m-\beta)}\frac{d^m}{dt^m}\int\limits_0^t\frac{y(\tau)}{(t-\tau)^{\beta-m+1}}d\tau.$$

Пусть $\alpha,\beta>0;\mu,\lambda\in R$.

Постановка задачи. Требуется, зная входной сигнал $x(t)$ и соответствующий выходной сигнал $y(t)$ системы, найти ее параметры α, $\beta>0$; $\mu,\lambda\in R$.

Решение. Для заданных входного $x(t)$ и соответствующего ему выходного $y(t)$ сигналов системы изображение Лапласа уравнения (4.6.12) с начальными условиями (4.6.13) будет иметь вид

$$\begin{gathered} p^{\alpha}Y(p)+\mu p^{\beta}Y(p)-a_1-pa_2-...-p^ma_m- \\ -\mu\left(b_1+pb_2+...+p^mb_m\right)+\lambda Y(p)=X(p), \end{gathered}$$

следовательно

$$\begin{gathered} p^{\alpha}+\mu p^{\beta}+\lambda= \\ =\frac{a_1+...+p^{m-1}a_m+\mu\left(b_1+...+p^mb_m\right)}{Y(p)}+\frac{X(p)}{Y(p)}. \end{gathered} \tag{4.6.14}$$

Введем функцию

$$F(\alpha_1,\beta_1,\mu_1,\lambda_1,p)=p^{\alpha_1}+\mu_1 p^{\beta_1}+\lambda_1-$$
$$-\frac{a_1+pa_2+...+p^{m-1}a_m+\mu_1\left(b_1+pb_2+...+p^m b_m\right)}{Y(p)}-\frac{X(p)}{Y(p)}.$$

На сегменте $[a,b]$ (сегмент $[a,b]$ удовлетворяет условиям (4.6.4)) введем узлы $t_i=a+\frac{b-a}{N}i, i=1,2,...,N$.

Значения искомых параметров $\alpha_1,\beta_1,\mu_1,\lambda_1$ найдем из условия минимума функционала

$$\Phi(\alpha_1,\beta_1,\mu_1,\lambda_1,p)=\sum_{i=1}^{N}\left(F(\alpha_1,\beta_1,\mu_1,\lambda_1,p)\right)^2\to\min.$$

Из необходимого условия минимума функционала $\Phi(\alpha_1,\beta_1,\mu_1,\lambda_1,p)$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\Phi}{\partial\alpha_1}=0,\\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial\beta_1}=0,\\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial\lambda_1}=0,\\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial\mu_1}=0\end{cases}$$

получим систему уравнений

$$\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{N}t_i^{2\alpha_1}\ln t_i+\mu_1\sum\limits_{i=1}^{N}t_i^{\alpha_1+\beta_1}\ln t_i+\lambda_1\sum\limits_{i=1}^{N}t_i^{\alpha_1}\ln t_i=\sum\limits_{i=1}^{N}\varphi(t_i)\,t_i^{\alpha_1}\ln t_i,\\ \sum\limits_{i=1}^{N}t_i^{\alpha_1+\beta_1}\ln t_i+\mu_1\sum\limits_{i=1}^{N}t_i^{2\beta_1}\ln t_i+\lambda_1\sum\limits_{i=1}^{N}t_i^{\beta_1}\ln t_i=\sum\limits_{i=1}^{N}\varphi(t_i)\,t_i^{\beta_1}\ln t_i,\\ \sum\limits_{i=1}^{N}t_i^{\alpha_1+\beta_1}+\mu_1\sum\limits_{i=1}^{N}t_i^{2\beta_1}+\lambda_1\sum\limits_{i=1}^{N}t_i^{\beta_1}=\sum\limits_{i=1}^{N}\varphi(t_i)\,t_i^{\beta_1},\\ \sum\limits_{i=1}^{N}t_i^{\alpha_1}+\mu_1\sum\limits_{i=1}^{N}t_i^{\beta_1}+\lambda_1 N=\sum\limits_{i=1}^{N}\varphi(t_i),\end{cases}$$

здесь $\varphi(t_i)=\dfrac{\sum_{k=1}^{n}a_k t_i^{k-1}+\mu_1\sum_{k=1}^{n}b_k t_i^{k-1}-X(t_i)}{Y(t_i)}$.

Из решения данной системы найдем искомые параметры α_1, β_1, μ_1, λ_1, которые являются приближенными значениями α,β,μ,λ соответственно.

Пример 4.6.3. Рассмотрим динамическую систему, описываемую задачей Коши

$$D_{0t}^{\frac{1}{2}}y + 3D_{0t}^{\frac{1}{3}}y - 5y = x(t), \tag{4.6.15}$$

$$D_{0t}^{-\frac{1}{2}}y = 0, D_{0t}^{-\frac{2}{3}}y = 0. \tag{4.6.16}$$

Решение. Решением задачи Коши (4.6.15), (4.6.16) при входном воздействии $x(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}1(t) + \frac{9\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}{2\sqrt{\pi}}\sqrt[6]{t} - 5\sqrt{t}$ будет функция $y(t) = \sqrt{t}$.

Изображения $x(t)$, $y(t)$ имеют вид $X(p) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2p^{\frac{3}{2}}}\left(p^{\frac{1}{2}} + 3p^{\frac{1}{3}} - 5\right)$ и $Y(p) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2p^{\frac{3}{2}}}$.

Подставляя данные изображения в (4.6.14), получим

$$p^{\alpha} + \mu p^{\beta} + \lambda = p^{\frac{1}{2}} + 3p^{\frac{1}{3}} - 5.$$

Отсюда находим параметры $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = \frac{1}{3}, \mu = 3, \lambda = -5$ системы, которые совпадают с точными значениями.

4.6.2. Параметрическая идентификация эредитарных систем с распределенными параметрами

Рассматриваются динамические системы, описываемые дифференциальными уравнениями в частных производных дробного порядка

$$A\partial_{ot}^{\alpha}u(t,x) = B\partial_{ox}^{\beta}u(t,x) + g(t,x) \tag{4.6.17}$$

с начальными

$$\partial_{ot}^{\alpha}u(0,x) = a_k(x), k = 1,2,...,m = [\alpha] + 1, \tag{4.6.18}$$

и краевыми условиями

$$\partial_{ot}^{\beta}u(t,0) = b_k(t), k = 1,2,...,n = [\beta] + 1. \tag{4.6.19}$$

Здесь $t \in [0,\infty), x \in [0,\infty)$

Напомним определение производных дробного порядка [146]:

$$\partial_{0t}^{\alpha}y(t,x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{\partial^n}{\partial t^n}\int\limits_0^t \frac{y(\tau,x)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}}d\tau, n = [\alpha].$$

Постановка задачи. Требуется, зная входной сигнал $g(t,x)$, выходной сигнал $u(t,x)$ для системы (4.6.17) с начальными и краевыми условиями (4.6.18), (4.6.19), найти ее параметры A, B, α, β.

Решение. Решение поставленной задачи основано на применении метода наименьших квадратов для минимизации в спектральной области функционалов от полиномов с неизвестными коэффициентами и дробными показателями.

Отметим, что преобразование Лапласа для производной дробного порядка имеет вид [172]:

$$L\left[D_{0t}^{\alpha}y(t)\right]=p^{\alpha}Y(p)-\sum_{j=1}^{n}b_{j}p^{j-1},$$

где $Y(p)=\int\limits_{0}^{+\infty}y(t)e^{-pt}dp$ – преобразование Лапласа функции $y(t)$, которое определено в области $\mathrm{Re}p>\sigma$, в которой функция $Y(p)$ является аналитической, $b_j{=}D_{0t}^{\alpha-j}y$, $j{=}1,2,...,n$; $n{=}[\alpha]{+}1$ – значения производных соответствующего порядка функции $y(t)$ при $t=0$.

Применив преобразование Лапласа к уравнению (4.6.17) с начальными и краевыми условиями (4.6.18), (4.6.19) по переменным t,x в предположении, что $U(p_1,p_2)\neq 0$, получим

$$Ap_1^{\alpha}-Bp_2^{\beta}=\ =\frac{A\left(p_1^{m-1}a_1\left(p_2\right)+...+a_m\left(p_2\right)\right)}{U\left(p_1,p_2\right)}-$$

$$-\frac{B\left(p_2^{n-1}b_1\left(p_1\right)+...+b_n\left(p_1\right)\right)}{U\left(p_1,p_2\right)}+\frac{G\left(p_1,p_2\right)}{U\left(p_1,p_2\right)}. \qquad (4.6.20)$$

Рассмотрим область $D=[a,b]\times[c,d]$, причем сегмент $[a,b]$ расположен в области $[c,+\infty)$, $c=\max\left(c_1,c_2\right)$, а сегмент $[c,d]$ расположен в области $[c',+\infty)$, $c'=\max\left(c_1',c_2'\right)$. Пусть функции $G(p_1,p_2)$, $U(p_1,p_2)$ удовлетворяют условиям

$$\begin{cases} G(p_1,p_2)\ \text{аналитическая при}\ \mathrm{Re}p_1{\geq}c_1,\mathrm{Re}p_2{\geq}c_1';\\ U(p_1,p_2)\ \text{аналитическая при}\ \mathrm{Re}p_1{\geq}c_1,\mathrm{Re}p_2{\geq}c_1';\\ U(p_1,p_2){\neq}0\ \text{при}\ \mathrm{Re}p_1{\in}[a,b],\mathrm{Re}p_2{\in}[c,d]. \end{cases} \qquad (4.6.21)$$

Введем сетку узлов $(t_i,\tau_j)\in D$:

$$\begin{cases} t_i=a+\frac{b-a}{M}i,\ i=1,2,...,M,\\ \tau_j=c+\frac{d-c}{N}j,\ j=1,2,...,N. \end{cases} \qquad (4.6.22)$$

В области D для выражения (4.6.20) введем функционал

$$\Phi\left(A_1, B_1, \alpha_1, \beta_1\right) = \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{M}\Big(A_1 t_i^{\alpha_1} - B_1\tau_j^{\beta_1} - \frac{A_1\left(t_i^{m-1}a_1\left(\tau_j\right) + ... + a_m\left(\tau_j\right)\right) - B_1\left(\tau_j^{m-1}b_1\left(t_i\right) + ... + b_n\left(t_i\right)\right)}{U\left(t_i, \tau_j\right)} - \frac{G\left(t_t, \tau_j\right)}{U\left(t_i, \tau_j\right)}\Big)^2.$$

Параметры $A_1, B_1, \alpha_1, \beta_1$ находятся методом наименьших квадратов из условия минимума функционала

$$\Phi\left(A_1, B_1, \alpha_1, \beta_1\right) \to \min.$$

Необходимое условие минимума функционала приводит к системе

$$\begin{cases} A_1\sum\limits_{i=1}^{M}\sum\limits_{j=1}^{N}\varphi_1^2\left(t_i, \tau_j\right) - B_1\sum\limits_{i=1}^{M}\sum\limits_{j=1}^{N}\varphi_2\left(t_i, \tau_j\right)\varphi_1\left(t_i, \tau_j\right) - \\ \qquad - \sum\limits_{i=1}^{M}\sum\limits_{j=1}^{N}\dfrac{G\left(t_t, \tau_j\right)}{U\left(t_i, \tau_j\right)}\varphi_1\left(t_i, \tau_j\right) = 0, \\ A_1\sum\limits_{i=1}^{M}\sum\limits_{j=1}^{N}\varphi_1\left(t_i, \tau_j\right)\varphi_2\left(t_i, \tau_j\right) - B_1\sum\limits_{i=1}^{M}\sum\limits_{j=1}^{N}\varphi_2^2\left(t_i, \tau_j\right) - \\ \qquad - \sum\limits_{i=1}^{M}\sum\limits_{j=1}^{N}\dfrac{G\left(t_t, \tau_j\right)}{U\left(t_i, \tau_j\right)}\varphi_2\left(t_i, \tau_j\right) = 0, \\ A_1\sum\limits_{i=1}^{M}\sum\limits_{j=1}^{N}\varphi_1\left(t_i, \tau_j\right)t_i^{\alpha_1}\ln\left(t_i\right) - B_1\sum\limits_{i=1}^{M}\sum\limits_{j=1}^{N}\varphi_2\left(t_i, \tau_j\right)t_i^{\alpha_1}\ln\left(t_i\right) - \\ \qquad - \sum\limits_{i=1}^{M}\sum\limits_{j=1}^{N}\dfrac{G\left(t_t, \tau_j\right)}{U\left(t_i, \tau_j\right)}t_i^{\alpha_1}\ln\left(t_i\right) = 0, \\ A_1\sum\limits_{i=1}^{M}\sum\limits_{j=1}^{N}\varphi_1\left(t_i, \tau_j\right)t_i^{\beta_1}\ln\left(t_i\right) - B_1\sum\limits_{i=1}^{M}\sum\limits_{j=1}^{N}\varphi_2\left(t_i, \tau_j\right)t_i^{\beta_1}\ln\left(t_i\right) - \\ \qquad - \sum\limits_{i=1}^{M}\sum\limits_{j=1}^{N}\dfrac{G\left(t_t, \tau_j\right)}{U\left(t_i, \tau_j\right)}t_i^{\beta_1}\ln\left(\tau_i\right) = 0, \end{cases}$$

где

$$\varphi_1\left(t, \tau\right) = t^{\alpha_1} - \frac{t^{m-1}a_1\left(\tau\right) + ... + a_m\left(\tau\right)}{U\left(t, \tau\right)},$$

$$\varphi_2(t,\tau) = t^{\beta_1} - \frac{\tau^{n-1}b_1(t) + ... + b_n(t)}{U(t,\tau)}.$$

Решая данную систему относительно неизвестных $A_1, B_1, \alpha_1, \beta_1$, получим приближенные значения искомых параметров A, B, α, β.

Предложенный метод применим и к дифференциальным уравнениям в частных производных целого порядка, причем метод применим к эллиптическим, гиперболическим и параболическим уравнениям.

1. Параболические уравнения

Рассмотрим параболическое уравнение

$$a\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = b\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x) + g(t,x) \tag{4.6.23}$$

с начальными

$$u(0,x) = a_1(x), \tag{4.6.24}$$

и краевыми

$$u(t,0) = b_1(t), u_x(t,0) = b_2(t) \tag{4.6.25}$$

условиями. Требуется, зная входной сигнал $g(t,x)$, выходной сигнал $u(t,x)$ для уравнения (4.6.23) с начальными и краевыми условиями (4.6.24), (4.6.25), найти ее параметры a, b. Из условия параболичности системы следует $a > 0, b > 0$.

Применив преобразование Лапласа последовательно по переменным t, x к уравнению (4.6.23) с начальными и краевыми условиями (4.6.24), (4.6.25), получим

$$ap_1 - bp_2^2 = \frac{aa_1(p_2) - b(p_2 b_1(p_1) + b_2(p_1))}{U(p_1,p_2)} + \frac{G(p_1,p_2)}{U(p_1,p_2)}. \tag{4.6.26}$$

В области D, удовлетворяющей условиям (4.6.20) на сетке узлов (4.6.21) $(t_i,\tau_j) \in D$, для выражения (4.6.26) определим функционал

$$\Phi(A,B) = \\ = \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{M}\left(At_i - B_1\tau_j^2 - \frac{Aa_1(\tau_j) - B(\tau_j b_1(t_i) + b_2(t_i))}{U(t_i,\tau_j)} - \frac{G(t_i,\tau_j)}{U(t_i,\tau_j)}\right)^2.$$

Параметры A, B находятся методом наименьших квадратов из условия минимума функционала

$$\Phi(A,B) \to \min.$$

Введем обозначения

$$\varphi(t,\tau)=t-\frac{a_1(\tau)}{U(t,\tau)},$$

$$\omega(t,\tau)=\tau^2-\frac{\tau b_1(t)+b_2(t)}{U(t,\tau)}.$$

Из необходимого условия минимума функционала имеем систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} A\sum\limits_{i=1}^{M}\sum\limits_{j=1}^{N}\varphi^2(t_i,\tau_j)-B\sum\limits_{i=1}^{M}\sum\limits_{j=1}^{N}\omega(t_i,\tau_j)\varphi(t_i,\tau_j)= \\ \qquad =\sum\limits_{i=1}^{M}\sum\limits_{j=1}^{N}\dfrac{G(t_i,\tau_j)}{U(t_i,\tau_j)}\varphi(t_i,\tau_j), \\ A\sum\limits_{i=1}^{M}\sum\limits_{j=1}^{N}\varphi(t_i,\tau_j)\omega(t_i,\tau_j)-B\sum\limits_{i=1}^{M}\sum\limits_{j=1}^{N}\omega^2(t_i,\tau_j)= \\ \qquad =\sum\limits_{i=1}^{M}\sum\limits_{j=1}^{N}\dfrac{G(t_i,\tau_j)}{U(t_i,\tau_j)}\omega(t_i,\tau_j). \end{cases}$$

Решая данную систему относительно неизвестных A, B, получим приближенные значения искомых параметров a, b.

2. Гиперболические уравнения

Рассмотрим волновое уравнение

$$a\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x)=b\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x)+g(t,x) \tag{4.6.27}$$

с начальными

$$u(0,x)=a_1(x),u_t(0,x)=a_2(t) \tag{4.6.28}$$

и краевыми

$$u(t,0)=b_1(t),u_x(t,0)=b_2(t) \tag{4.6.29}$$

условиями.

Требуется, зная входной сигнал $g(t,x)$, выходной сигнал $u(t,x)$ системы (4.6.27) с начальными и краевыми условиями (4.6.28), (4.6.30), найти ее параметры a, b. Из условия гиперболичности уравнения (4.6.27) следует $a>0, b>0$.

Применив последовательно преобразование Лапласа по переменным t, x к уравнению (4.6.27) с начальными и краевыми условиями (4.6.28), (4.6.30), получим

$$ap_1^2-bp_2^2=\frac{a(p_1a_1(p_2)+a_2(p_2))-b(p_2b_1(p_1)+b_2(p_1))}{U(p_1,p_2)}+$$

$$+\frac{G\left(p_1,p_2\right)}{U\left(p_1,p_2\right)}. \tag{4.6.30}$$

В области D, удовлетворяющей условиям (4.6.21), на сетке узлов (4.6.22) $(t_i,\tau_j)\in D$ для выражения (4.6.30) определим функционал

$$\Phi\left(A,B\right)=$$
$$=\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{M}\left(At_j^2-B_1\tau_j^2-\frac{A\left(t_ia_1\left(\tau_j\right)+a_2\left(\tau_j\right)\right)-B\left(\tau_jb_1\left(t_i\right)+b_2\left(t_i\right)\right)}{U\left(t_i,\tau_j\right)}\right)^2.$$

Параметры A,B находятся методом наименьших квадратов из условия минимума функционала

$$\Phi\left(A,B\right)\to\min.$$

Из необходимого условия минимума функционала имеем систему:

$$\begin{cases} A\sum\limits_{i=1}^{M}\sum\limits_{j=1}^{N}\varphi^2\left(t_i,\tau_j\right)-B\sum\limits_{i=1}^{M}\sum\limits_{j=1}^{N}\omega\left(t_i,\tau_j\right)\varphi\left(t_i,\tau_j\right)= \\ \qquad=\sum\limits_{i=1}^{M}\sum\limits_{j=1}^{N}\dfrac{G\left(t_i,\tau_j\right)}{U\left(t_i,\tau_j\right)}\varphi\left(t_i,\tau_j\right), \\ A\sum\limits_{i=1}^{M}\sum\limits_{j=1}^{N}\varphi\left(t_i,\tau_j\right)\omega\left(t_i,\tau_j\right)-B\sum\limits_{i=1}^{M}\sum\limits_{j=1}^{N}\omega^2\left(t_i,\tau_j\right)= \\ \qquad=\sum\limits_{i=1}^{M}\sum\limits_{j=1}^{N}\dfrac{G\left(t_i,\tau_j\right)}{U\left(t_i,\tau_j\right)}\omega\left(t_i,\tau_j\right), \end{cases}$$

где

$$\varphi\left(t,\tau\right)=t^2-\frac{ta_1\left(\tau\right)+a_2\left(\tau\right)}{U\left(t,\tau\right)},$$
$$\omega\left(t,\tau\right)=\tau^2-\frac{\tau b_1\left(t\right)+b_2\left(t\right)}{U\left(t,\tau\right)}.$$

Решая данную систему относительно неизвестных A,B, получим приближенные значения искомых параметров a,b.

3. Эллиптические уравнения

Рассмотрим уравнение

$$a\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x)+b\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x)+\lambda u(t,x)=g(t,x) \tag{4.6.31}$$

с начальными

$$u(0,x)=a_1(x), u'_t(0,x)=a_2(t) \tag{4.6.32}$$

и краевыми

$$u(t,0)=b_1(t), u'_x(t,0)=b_2(t) \tag{4.6.33}$$

условиями. Требуется, зная входной сигнал $g(t,x)$, выходной сигнал $u(t,x)$ системы (4.6.31) с начальными (4.6.32) и краевыми условиями (4.6.33), найти ее параметры a, b. Из условия эллиптичности следует $a>0, b>0$.

Применив преобразование Лапласа, последовательно, по переменным t, x к уравнению (4.6.31) с начальными (4.6.32) и краевыми условиями (4.6.33), получим

$$ap_1^2+bp_2^2+\lambda=\frac{G(p_1,p_2)}{U(p_1,p_2)}- \\ -\frac{a(p_1a_1(p_2)+a_2(p_2))+b(p_2b_1(p_1)+b_2(p_1))}{U(p_1,p_2)}. \tag{4.6.34}$$

Для правой части выражения (4.6.34) в области D определим функцию, удовлетворяющих условиям (4.6.21). На сетке узлов (4.6.22) $(t_i,\tau_j)\in D$ рассмотрим функционал

$$\Phi(A,B)=\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{M}\Big(At_j^2+B_1\tau_j^2+\lambda- \\ -\frac{A(t_ia_1(\tau_j)+a_2(\tau_j))-B(\tau_jb_1(t_i)+b_2(t_i))}{U(t_i,\tau_j)}-\frac{G(t_i,\tau_j)}{U(t_i,\tau_j)}\Big)^2.$$

Параметры A, B находятся методом наименьших квадратов из условия минимума функционала

$$\Phi(A,B)\to\min.$$

Введем обозначения

$$\varphi(t,\tau)=t^2-\frac{ta_1(\tau)+a_2(\tau)}{U(t,\tau)},$$

$$\omega(t,\tau)=\tau^2-\frac{\tau b_1(t)+b_2(t)}{U(t,\tau)}.$$

Из необходимого условия минимума функционала получим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} A\sum\limits_{i=1}^{M}\sum\limits_{j=1}^{N}\varphi^2(t_i,\tau_j)+B\sum\limits_{i=1}^{M}\sum\limits_{j=1}^{N}\omega(t_i,\tau_j)\varphi(t_i,\tau_j)+ \\ +C\sum\limits_{i=1}^{M}\sum\limits_{j=1}^{N}\varphi(t_i,\tau_j)=\sum\limits_{i=1}^{M}\sum\limits_{j=1}^{N}\dfrac{G(t_i,\tau_j)}{U(t_i,\tau_j)}\varphi(t_i,\tau_j), \\ A\sum\limits_{i=1}^{M}\sum\limits_{j=1}^{N}\varphi(t_i,\tau_j)\omega(t_i,\tau_j)+B\sum\limits_{i=1}^{M}\sum\limits_{j=1}^{N}\omega^2(t_i,\tau_j)+ \\ +C\sum\limits_{i=1}^{M}\sum\limits_{j=1}^{N}\omega(t_i,\tau_j)=\sum\limits_{i=1}^{M}\sum\limits_{j=1}^{N}\dfrac{G(t_i,\tau_j)}{U(t_i,\tau_j)}\omega(t_i,\tau_j), \\ A\sum\limits_{i=1}^{M}\sum\limits_{j=1}^{N}\varphi(t_i,\tau_j)+B\sum\limits_{i=1}^{M}\sum\limits_{j=1}^{N}\omega(t_i,\tau_j)+CMN= \\ =\sum\limits_{i=1}^{M}\sum\limits_{j=1}^{N}\dfrac{G(t_i,\tau_j)}{U(t_i,\tau_j)}, \end{cases}$$

Решая данную систему относительно неизвестных A, B, C, получим приближенные значения искомых параметров a, b, λ.

Пример 4.6.4. Рассмотрим уравнение (4.6.31) при $\lambda = 0$:

$$a\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(t,x)+b\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x)=g(t,x), 0<t<\infty, 0<x<\infty,$$

с начальными и краевыми условиями (4.6.32), (4.6.33).

Требуется, зная входной сигнал $g(t,x)$ и выходной сигнал $u(t,x)$, с начальными (4.6.32) и краевыми условиями (4.6.33) определить параметры a, b. Пусть $a = 4, b = 9$. Пусть входной сигнал определен функцией

$$g(t,x)=6e^{2x}\sin 3t, \tag{4.6.35}$$

а выходной сигнал

$$u(t,x)=xe^{2x}\sin 3t \tag{4.6.36}$$

удовлетворяет начальным и краевым условиям

$$\begin{cases} u(0,x)=0, u_t(0,x)=3xe^{2x}, \\ u(t,0)=0, u_x(t,0)=\sin 3t. \end{cases} \tag{4.6.37}$$

Решение. Изображения входного (4.6.35) и выходного (4.6.36) сигналов имеют вид

$$G(p_1, p_2) = \frac{108}{(p_1^2 + 9)(p_2 - 2)},$$
$$U(p_1, p_2) = \frac{3}{(p_1^2 + 9)(p_2 - 2)^2}. \qquad (4.6.38)$$

Изображения начальных и краевых условий (4.6.37) имеют вид

$$a_1(p_2) = b_1(p_1) = 0, a_2(p_2) = \frac{3}{(p_2 - 2)^2}, b_2(p_1) = \frac{3}{p_1^2 + 9}. \qquad (4.6.39)$$

Подставляя (4.6.38), (4.6.39) в (4.6.34) ($\lambda = 0$), получим

$$ap_1^2 + bp_2^2 = a\left(p_1^2 + 9\right) + b(p_2 - 2)^2 + 36p_2 - 72;$$

$$4p_2(9 - b) + (9a + 4b - 72) = 0,$$

или

$$\begin{cases} 9 - b = 0, \\ 9a + 4b - 72 = 0. \end{cases}$$

Из полученной системы следует $a = 4, b = 9$, что совпадает с точными значениями.

Глава 5

Восстановление входных сигналов динамических систем

5.1. Обзор методов

Проблема восстановления входных сигналов, искаженных приборами или линиями передач, восходит к Релею, который поставил следующую задачу: возможно ли построить такой алгоритм, что в результате его применения к функции, наблюдаемой на выходе прибора, восстановить входную функцию.

Существуют два принципиальных подхода к решению этой задачи, выделенных в монографии [49]: априорный, который состоит в том, что совершенствованием конструкции прибора добиваются минимума искажений в системе приема сигнала, и апостериорный, который заключается в восстановлении самих сигналов по определенным алгоритмам.

Отметим, что к первому подходу примыкают работы одного из авторов, посвященные решению задач измерительной техники оптическими методами [91–107, 109, 110].

Данная работа примыкает ко второму подходу решения данной задачи, и поэтому ниже упоминаются только связанные с ним работы.

Подробный обзор методов восстановления входных сигналов приведен в монографиях [49, 50], в обзоре [166].

Задача восстановления входных сигналов, искаженных линейными инвариантными к сдвигу времени системами [163], заключается в решении уравнения

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau)x(\tau)d\tau = f(t) + \eta(t), \qquad (5.1.1)$$

где $x(t)$ и $f(t)$ — входной и выходной сигналы; $g(t)$ — импульсная переходная функция; $\eta(t)$ — искажения, вызванные шумом и другими внешними воздействиями.

Задача восстановления входного сигнала является некорректно поставленной [49, 162, 170] и для своего решения требует использования методов регуляризации.

Выделим несколько методов, разработанных для приближенного решения уравнения (5.1.1).

Прежде всего надо отметить методы, связанные с применением интегральных преобразований в совокупности с регулирующими множителями [3, 170].

Большая группа методов основана на аппроксимации выходных сигналов и ИПФ по различным полным системам функций [49, 50].

Отдельную большую группу методов восстановления составляют итерационные методы [49, 181].

Как и в задаче определения ИПФ, для восстановления входных сигналов широко применяются методы регуляризации [49, 50, 115, 170], методы квазирешений [80], а также проекционные методы [49, 65].

5.2. Итерационные методы восстановления сигналов, искаженных линейными непрерывными системами[1]

Ниже исследуются итерационные методы восстановления сигналов, искаженных устройствами, описываемыми интегральными уравнениями:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau)x(\tau)d\tau = f(t), \tag{5.2.1}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(t_1-\tau_1, t_2-\tau_2)x(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2 = f(t_1,t_2), \tag{5.2.2}$$

где x, f — соответственно входной и выходной сигналы; g — импульсная переходная функция.

[1] Раздел написан по материалам статей [39, 40].

Предлагаются и обосновываются итерационные схемы, восстанавливающие входной сигнал при весьма общем требовании, налагаемом на спектр импульсной переходной функции g. В частности, для решения уравнения (5.2.1) достаточно, чтобы функция $G(\omega)$, являющаяся преобразованием Фурье функции g, при изменении ω в интервале $(-\infty, \infty)$ обращалась в нуль в конечном числе точек.

Задача восстановления входных сигналов является одной из основных в теории управления (при коррекции систем управления), теории распознавания образов и в теории связи (при коррекции сигналов от внутриканальных искажений). Подробный обзор методов восстановления сигналов и обширная библиография приведены в книгах [49, 50].

Как отмечается в работах [49, 50, 181], основным недостатком известных итерационных методов решения уравнения (5.2.1) являются достаточно жесткие условия сходимости.

Ниже приведен ряд итерационных схем, являющихся обобщением известных и хорошо зарекомендовавших себя на практике итерационных методов. Предлагаемые методы подробно исследуем на примере уравнения (5.2.1), а затем укажем способ их распространения на уравнение (5.2.2).

Обоснование итерационных алгоритмов будем проводить в пространстве $L_2(-\infty, \infty)$.

Обозначим через $G(\omega), X(\omega), F(\omega)$ преобразования Фурье функций $g(t)$, $x(t)$, $f(t)$.

Будем говорить, что выполнено условие A, если в плоскости комплексной переменной z множество значений $G(\omega)$ расположено внутри угла с вершиной в начале координат и с раствором, меньшим π, причем при конечных значениях ω функция $G(\omega)$ не равна нулю.

Тогда найдется такая константа γ (в общем случае комплексная), что множество значений $\gamma G(\omega)$ будет расположено внутри и на окружности с центром в точке $(+1, 0)$ с радиусом, равным 1.

Замечание 5.2.1. *Отметим, что введение комплексной константы γ принципиально отличает приводимые ниже алгоритмы от ранее известных (см., например,* [49, 176, 181]).

5.2.1. Итерационные методы решения одномерных уравнений

Пусть спектры входного и выходного сигналов расположены в сегменте $[-T,T]$ и выполнено условие A. Тогда найдется такая константа γ, при которой $\max\limits_{|\omega|\le T}|1-\gamma G(\omega)| = q < 1$.

Рассмотрим итерационный процесс:

$$x_{n+1}(t) = x_n(t) - \gamma \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau)x_n(\tau)d\tau + \gamma f(t). \qquad (5.2.3)$$

Отметим, что, в отличие от [181], где при построении итерационных процесов требуется, чтобы константа γ была действительным числом, в итерационной схеме (5.2.3) γ может быть комплексной.

Теорема 5.2.1. *Пусть спектры входного и выходного сигналов расположены на сегменте $[-T,T]$ и выполнено условие A. Тогда последовательность $x_n(t)$ сходится к решению $x^*(t)$ уравнения* (5.2.1) *со скоростью $\|x^*(t) - x_n(t)\| = O(q^n)$.*

Пусть выполнено условие A и носители функций $X(\omega), F(\omega)$ определены в интервале $(-\infty,\infty)$.

Рассмотрим итерационный процесс:

$$x_{n+1}(t) = \alpha_n x_n(t) +$$

$$+(1-\alpha_n)\left[x_n(t) - \gamma \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau)x_n(\tau)d\tau + \gamma f(t)\right], \qquad (5.2.4)$$

где $0 < \varepsilon_0 \le \alpha_n \le 1-\varepsilon_1 < 1$, γ – константа, определенная из условия $\max\limits_{\omega}|1-\gamma G(\omega)| \le 1$.

Теорема 5.2.2. *Пусть уравнение* (5.2.1) *имеет единственное решение $x^*(t)$ и выполнено условие A. Последовательность $x_n(t)$, определяемая итерационной схемой* (5.2.4), *сходится к $x^*(t)$.*

Рассмотрим итерационный процесс:

$$x_{n+1}^T(t) = x_n^T(t) - \gamma \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau)x_n^T(\tau)d\tau + \gamma \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi_T(t-\tau)f(\tau)dt, \quad (5.2.5)$$

где Фурье-образ функции $\psi_T(t)$ имеет вид

$$\psi_T(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad |\omega| \le T, \\ 0 & \text{при остальных значениях} \quad \omega, \end{cases}$$

а спектр функции $x_0^T(t)$ сосредоточен на сегменте $[-T,T]$.

В итерационной схеме (5.2.5) вместо функции $\psi_T(\omega)$ можно взять и другие множители, в частности, используемые в работах [10, 158, 178, 181].

Теорема 5.2.3. *Пусть выполнено условие A и уравнение* (5.2.1) *имеет единственное решение $x^*(t)$. Тогда итерационный процесс* (5.2.5) *сходится при любом начальном приближении $x_0(t)$ со спектром, сосредоточенным в сегменте $[-T,T]$, и справедлива оценка*

$$\|x^* - x_n^T\| \le cq^n + \varepsilon +$$

$$+|\gamma| \left\{ \int_{-\infty}^{-T} |f(t)|^2 dt + \int_{T}^{\infty} |f(t)|^2 dt \right\}^{1/2} + \varepsilon \max |g(t)|/(1-q), \quad (5.2.6)$$

где $q = \max\limits_{|\omega|\le T} |1-\gamma G(\omega)|$, $\varepsilon = \left[\int\limits_{-\infty}^{-T} |x^*(\omega)|^2 d\omega + \int\limits_{T}^{\infty} |x^*(\omega)|^2 d\omega \right]^{1/2}$.

Пусть условие A не выполняется. Обозначим через T_0 и T_N достаточно большие по абсолютной величине числа, выбор которых определяется условием

$$\varepsilon = \left[\int_{-\infty}^{T_0} |X(\omega)|^2 d\omega + \int_{T_N}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega \right]^{1/2}.$$

Введем сегменты $\Delta_k = [T_{k-1}, T_k]$, $k = 1, 2, \ldots, N$, где точки T_k выберем таким образом $-T = T_0 < T_1 < \cdots < T_N = T$, чтобы при изменении ω в сегменте Δ_k $(k = 1, 2, \ldots, N)$ приращение аргумента $G(\omega)$ было меньше π. Каждому сегменту Δ_k $(k = 1, 2, \ldots, N)$ поставим в соответствие такую константу γ_k, что значения функций $\gamma_k G(\omega)$ при $\omega \in \Delta_k$ лежат внутри единичного круга с центром в точке $(1, 0)$. Обозначим через $E_j(\omega)$ $(j = 1, 2, \ldots, N)$ характеристические функции сегментов Δ_j, $j = 1, 2, \ldots, N$, а через $x_j^*(t), x_{0j}(t), f_j(t)$ – прообразы функций $E_j(\omega)X^*(\omega)$, $E_j(\omega)X_0(\omega)$, $E_j(\omega)F(\omega)$. Для нахождения входного сигнала $x^*(t)$ используем итерационный процесс

$$x_{n+1,j}(t) = x_{n,j}(t) - \gamma_j \int_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau) x_{n,j}(\tau) d\tau + \gamma_j f_j(t), \qquad (5.2.7)$$

$j = 1, \ldots, N$, $n = 0, 1, \ldots$

Определим $x_{n+1}(t)$ из выражения

$$x_{n+1}(t) = \sum_{j=1}^{N} x_{n+1,j}(t). \tag{5.2.8}$$

Теорема 5.2.4. *Пусть уравнение* (5.2.1) *имеет решение* $x^*(t)$.

Тогда последовательные приближения $x_{n+1}(t)$ *сходятся и справедлива оценка*

$$\|x^*(t) - x_{n+1}(t)\| \le cq^n + \varepsilon(1 + \max|g(t)|)/(1-q) +$$

$$+\gamma \left\{ \int_{-\infty}^{T_0} |f(t)|^2 dt + \int_{T_N}^{\infty} |f(t)|^2 dt \right\}^{1/2},$$

$$\varepsilon = \left[\int_{-\infty}^{T_0} |X^*(\omega)|^2 d\omega + \int_{T_N}^{\infty} |X^*(\omega)|^2 d\omega \right]^{1/2},$$

$$q = \max_{1\le j\le N} q_i, \ \gamma = \max_{1\le j\le N} |\gamma_j|.$$

Доказательство теоремы 5.2.1. Так как в пространстве $L_2(-\infty,\infty)$ $\|x(t)\| = \|X(\omega)\|$, то справедливость теоремы 5.2.1 следует из неравенства

$$\|x_{n+1}(t) - x_n(t)\| = \|x_n(t) - x_{n-1}(t) - \gamma \int_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau)(x_n(\tau) - x_{n-1}(\tau))d\tau\| =$$
$$= \|X_n(\omega) - X_{n-1}(\omega) - \gamma G(\omega)(X_n(\omega) - X_{n-1}(\omega))\| \le$$
$$\le \max_{|\omega|\le T} |1 - \gamma G(\omega)| \|x_n(t) - x_{n-1}(t)\| =$$
$$= q\|x_n(t) - x_{n-1}(t)\|$$

и теоремы Банаха о неподвижной точке (см. разд. 1.3.1).

Доказательство теоремы 5.2.2. Справедливость теоремы следует из того, что норма оператора $Kx \equiv x(t) - \gamma \int_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau)x(\tau)d\tau$ при выполнении условия A равна единице, и из соответствующих утверждений теоремы 1.3.2.

Доказательство теоремы 5.2.3. Докажем сходимость итерационного процесса (5.2.5). Так как решение $x^*(t)$ уравнения (5.2.1) принадлежит пространству L_2, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая константа T, при которой $\int_{-\infty}^{-T} |X^*(\omega)^2 d\omega + \int_{T}^{\infty} |X^*(\omega)|^2 d\omega \le \varepsilon^2$. Возьмем в качестве начального приближения функцию $x_0(t)$ с финитным

спектром, сосредоточенным на сегменте $[-T,T]$. Для последовательных приближений $x_n^T(t)$ имеем

$$\|x_{n+1}^T(t)-x_n^T(t)\|=\|X_n^T(\omega)-X_{n-1}^T(\omega)-\gamma G(\omega)(X_n^T(\omega)-X_{n-1}^T(\omega))\|\leq$$
$$\leq \max_{|\omega|\leq T}|1-\gamma G(\omega)|\|x_n^T(t)-x_{n-1}^T(t)\|=$$
$$=q(T)\|x_n^T(t)-x_{n-1}^T(t)\|\leq q^n(T)\|x_1^T(t)-x_0^T(t)\|.$$

Из условия A следует, что $q(T)<1$; по теореме Банаха о сжатых отображениях (см. теорему 1.3.1) последовательность $x_n^T(t)$ сходится к решению x^{*T} уравнения

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau)x(\tau)d\tau \int_{-\infty}^{\infty}\psi_T(t-\tau)f(\tau)d\tau. \tag{5.2.9}$$

Оценим близость решений $x^*(t)$ и $x^{*T}(t)$ уравнений (5.2.1) и (5.2.9). Представим функцию $X^*(\omega)$ в виде $X_1^*(\omega)+X_2^*(\omega)$, где

$$X_1^*(\omega)=\begin{cases} X^*(\omega) & \text{при} \quad |\omega|\leq T,\\ 0 & \text{при} \quad |\omega|>T,\end{cases}$$

$$X_2^*(\omega)=\begin{cases} 0 & \text{при } |\omega|\leq T,\\ X^*(\omega) & \text{при } |\omega|>T.\end{cases}$$

Обозначим через $x_1^*(t)$ и $x_2^*(t)$ прообразы функций $X_1^*(\omega)$ и $X_2^*(\omega)$. Нетрудно видеть, что

$$x_1^*(t)-x^{*T}(t)=x_1^*(t)-x^{*T}(\tau)-\gamma\int_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau)(x_1^*(\tau)-x^{*T}(t))d\tau+$$
$$+\gamma f(t)-\gamma\int_{-\infty}^{\infty}\psi_T(t-\tau)f(\tau)d\tau-\gamma\int_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau)x_2^*(\tau)d\tau.$$

Переходя к нормам, имеем

$$\|x_1^*(t)-x^{*T}(t)\|\leq$$
$$\leq|\gamma|\frac{\left\{\left\{\int\limits_{-\infty}^{-T}|f(t)|^2dt+\int\limits_{T}^{\infty}|f(t)|^2dt\right\}^{1/2}+\|x_2^*(t)\|\max_t|g(t)|\right\}}{|1-\max(1-\gamma G(\omega))|}.$$

Так как $\|x^*(t)-x^{*T}(t)\|\leq\|x_1^*(t)-x_2^{*T}(t)\|+\|x_2^*(t)\|$; $\|x_2^*(t)\|\leq\varepsilon$, то получаем оценку (5.2.6).

Доказательство теоремы 5.2.4. Докажем сходимость итерационного процесса (5.2.7). Так как решение $x^*(t)$ уравнения (5.2.1)

принадлежит пространству L_2, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая константа T, при которой

$$\int_{-\infty}^{-T} |X^*(\omega)|^2 d\omega + \int_{T}^{\infty} |X^*(\omega)|^2 d\omega < \varepsilon^2.$$

Возьмем в качестве начального приближения функцию $x_0(t)$ с финитным спектром, сосредоточенным на сегменте $[-T, T]$.

Повторяя рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы 5.2.1, убеждаемся, что $x_{n+1,j}(t) \to x_j^*(t)$. Таким образом, последовательность $x_{n+1}(t)$, определяемая выражением (5.2.8), сходится к функции $x^{*T}(t)$. Оценка погрешности итерационной схемы (5.2.7)–(5.2.8) может быть получена повторением выкладок, проведенных при доказательстве теоремы 5.2.3.

5.2.2. Итерационные методы решения многомерных уравнений

Рассмотрим двумерное уравнение (5.2.2). Все описанные в разд. 5.2.1 итерационные схемы допускают распространение и на многомерный случай при любом конечном числе измерений.

Обозначим через $X(\omega_1, \omega_2), G(\omega_1, \omega_2), F(\omega_1, \omega_2)$ преобразования Фурье функций $x(t_1, t_2)$, $g(t_1, t_2)$, $f(t_1, t_2)$.

Аналогом условия A является следующее: множество значений функции $G(\omega_1, \omega_2)$ при изменении аргументов ω_1, ω_2 в интервале $-\infty < \omega_1, \omega_2 < \infty$ расположено внутри угла раствора, меньшего π, с вершиной в начале координат; функция $G(\omega_1, \omega_2) \neq 0$ при конечных значениях ω_1 и ω_2.

Пусть функции $X(\omega_1, \omega_2)$ и $F(\omega_1, \omega_2)$ финитны и их носители расположены в квадрате $[-T, T; -T, T]$. Из условия A следует, что существует такое комплексное число γ, при котором

$$\max_{|\omega_i| \le T,\ i=1,2} |1 - \gamma G(\omega_1, \omega_2)| = q < 1.$$

Рассмотрим итерационный процесс

$$x_{n+1}(t_1, t_2) = x_n(t_1, t_2) -$$
$$-\gamma \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(t_1 - \tau_1, t_2 - \tau_2) x_n(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 + \gamma f(t_1, t_2).$$

Теорема 5.2.5. *Пусть уравнение* (5.2.2) *имеет единственное решение* $x^*(t_1, t_2)$, *выполнено условие* A, *функции* $X(\omega_1, \omega_2)$ *и* $F(\omega_1, \omega_2)$

финитны. Последовательные приближения $x_{n+1}(t_1,t_2)$ *сходятся к функции* $x^*(t_1,t_2)$ *со скоростью*

$$\|x^*(t_1,t_2)-x_{n+1}(t_1,t_2)\|=cq^{n+1}.$$

Пусть функция $G(\omega_1,\omega_2)$ обращается в нуль в конечном числе точек. Разобьем плоскость (ω_1,ω_2) на конечное число прямоугольников $\Delta_{kl}=[v_k,v_{k+1};w_l,w_{l+1}]$, $k=1,2,\ldots,N_1$, $l=1,2,\ldots,N_2$, причем v_1, v_{N_1}, w_1, w_{N_1} принимают значения, равные $\pm\infty$, таким образом, чтобы при изменении аргументов (ω_1,ω_2) в прямоугольнике Δ_{kl} значения $G(\omega_1,\omega_2)$ были расположены внутри (и, возможно, в вершине) угла раствора, меньшего π, с вершиной в начале координат плоскости комплексной переменной.

Каждому прямоугольнику Δ_{kl} ставится в соответствие такое комплексное число γ_{kl}, при котором

$$\sup_{(\omega_1,\omega_2)\in\Delta_{kl}}|1-\gamma_{kl}G(\omega_1,\omega_2)|\le q_{kl}\le 1.$$

Тогда последовательные приближения

$$x_{n+1,kl}(t_1,t_2)=\alpha_n x_{n,kl}(t_1,t_2)+(1-\alpha_n)(x_{n,kl}(t_1,t_2)-$$

$$-\gamma_{kl}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}g(t_1-\tau_1,t_2-\tau_2)x_{n,kl}(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2+\gamma_{kl}f_{kl}(t_1,t_2))$$

сходятся к функциям $x^*_{kl}(t_1,t_2)$ и $x^*(t_1,t_2)=\sum_{k=0}^{N_1}\sum_{l=0}^{N_2}x^*_{kl}(t_1,t_2)$.

Доказательство этого утверждения проводится по аналогии с доказательством теоремы 5.2.4.

5.2.3. Регуляризация локальным сдвигом

Рассмотрим случай, когда множество значений $G(\omega)$ расположено внутри и на сторонах угла раствора, меньшего π, с вершиной в начале координат. Для простоты изложения будем считать, что функция $G(\omega)$ обращается в нуль только в одной конечной точке ω (скажем, в точке $\omega=0$). В качестве примера можно указать на задачу гравиметрии, исследованную в монографии [164, с. 125–126]. Эта задача описывается уравнением (5.2.1) с ядром

$$g(t-\tau)=\frac{1}{\pi}\frac{a^2-(t-\tau)^2}{[(t-\tau)^2+a^2]^2},$$

имеющим преобразование Фурье

$$G(\omega) = |\omega| e^{-|\omega| a}.$$

Обозначим через $\delta_m(\omega)$ одну из дельта-образных положительных последовательностей, сходящуюся к дельта-функции $\delta(\omega)$; через $\Delta_m(t)$ – обратное преобразование Фурье функций последовательности $\delta_m(\omega)$.

Рассмотрим итерационный процесс

$$x_{n+1}(t)=\alpha_n x_n(t) + (1-\alpha_n)(x_n - \beta \int_{-\infty}^{\infty} \Delta_m(t-\tau) x_n(\tau) d\tau -$$

$$-\gamma \int_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau) x_n(\tau) d\tau + \gamma f(t)), \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{5.2.10}$$

где β, m – параметры регуляризации; m – целое число, а константа γ выбрана так, что $\sup_\omega |1 - \beta\delta_m(\omega) - \gamma G(\omega)| \le 1$.

Повторяя рассуждения, приведенные в разд. 5.2.1, убеждаемся в том, что итерационный процесс (5.2.10) сходится.

Различие предложенной вычислительной схемы от способов регуляризации сдвигом [170] заключается в том, что здесь сдвиг происходит только в непосредственной близости от частот, вызывающих неустойчивость решения уравнения (5.2.1).

5.3. Итерационные методы восстановления сигналов, искаженных дискретными линейными системами

Рассмотрим бесконечную систему уравнений

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{l-k} x_k = f_k, \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \pm \ldots \tag{5.3.1}$$

Помимо традиционных областей применения систем, описываемых уравненнием вида (5.3.1), находят применение в геофизике (например, обратные задачи гравиметрии [164]).

Покажем, что алгоритмы, исследованные в разд. 5.2.1, 5.2.2, применимы и к системе уравнений (5.3.1).

Обозначим через $A(\Theta), X(\Theta), F(\Theta)$ дискретные преобразования Фурье числовых последовательностей a_k, x_k, f_k, где $k = \ldots, -n,$

$\ldots, -1, 0, 1, \ldots, n, \ldots$ соответственно. Напомним, что дискретное преобразование последовательности a_k определяется выражением

$$A(\Theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ik\Theta}, \quad 0 \le \Theta \le 2\pi.$$

Пусть выполняется условие A: значения функции $A(\Theta)$ при $0 \le \Theta \le 2\pi$ расположены внутри угла раствора, меньшего π, с вершиной в начале координат. Тогда существует такая комплексная константа γ, при которой множество значений функции $\gamma A(\Theta)$ расположено внутри окружности с радиусом, равным 1, и с центром в точке (1,0) и, возможно, пересекается с самой окружностью в точке (0,0).

Применим к системе уравнений (5.3.1) итерационный процесс

$$x_l^{n+1} = x_l^n - \gamma \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{l-k} x_k^n - f_l \right), \quad (l = \ldots, -n, \ldots, n, \ldots). \qquad (5.3.2)$$

Сходимость процесса (5.3.2) будем исследовать в пространстве l_2 с нормой $\|x\| = \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x_k|^2\right]^{1/2}$. Обозначим через $L_2[0, 2\pi]$ множество функций $x(e^{is})$, суммируемых с квадратом и с нормой

$$\|x\|_{L_2} = \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(e^{is}) \overline{x(e^{is})} ds \right]^{1/2}.$$

Применим к итерационному процессу (5.3.2) ДПФ:

$$X^{n+1}(\Theta) = X^n(\Theta) - \gamma(A(\Theta)X^n(\Theta) - F(\Theta)).$$

Переходя к нормам, имеем

$$\|x^{n+1} - x^n\|_{l_2} = \|X^{n+1}(\Theta) - X^n(\Theta)\|_{l_2} =$$

$$= \left\| \left\{ (x_l^n - x_l^{n-1}) - \gamma \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{l-k}(x_k^n - x_k^{n-1}) \right) \right\}_{(-\infty,\infty)} \right\|_{l_2} =$$

$$= \|(X^N(\Theta) - X^{n-1}(\Theta)(1 - \gamma A(\Theta))\|_{L_2} \le$$

$$\le \max_{0 \le \Theta \le 2\pi} |1 - \gamma A(\Theta)| \|X^n(\Theta) - X^{n-1}(\Theta)\|_{l_2} =$$

$$= \max_{0 \le \Theta \le 2\pi} |1 - \gamma A(\Theta)| \|x^n - x^{n-1}\|_{l_2}.$$

Если $\max\limits_{\Theta}|1-\gamma A(\Theta)| = q < 1$, то по теореме Банаха (см. теорему 1.3.1) итерационный процесс (5.3.2) сходится.

В случае, если $\max\limits_{\Theta}|1-\gamma A(\Theta)| = 1$, то систему уравнений (5.3.2) можно решать методом итерации по схеме

$$x_l^{n+1} = \gamma_n x_l^n - (1-\gamma_n)\gamma\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{l-k}(x_k^n - f_l)\right), \quad l = \ldots, -n, \ldots, n, \ldots,$$

где $0 < \alpha < \gamma_n < \beta < 1$.

Сходимость этой схемы доказывается так же, как и в континуальном случае.

Рассмотрим случай, когда условие A не выполнено, но функция $A(\Theta)$ обращается в нуль в конечном числе точек. Разобъем сегмент $[0, 2\pi]$ на конечное число частей $\Delta_k{=}[a_k, a_{k+1}]$, $k{=}0, 1, \ldots, n-1$, $a_0{=}0$, $a_n = 2\pi$ таким образом, чтобы при изменении Θ на сегменте Δ_k значения $A(\Theta)(\Theta \in \Delta_k)$ были бы расположены внутри угла раствора, меньшего π, с вершиной в начале координат. Тогда с каждым сегментом Δ_k можно связать константу γ_k таким образом, что множество значений $\gamma_k A(\Theta)(\Theta \in \Delta_k)$ будет расположено внутри единичной окружности с центром в точке (1,0) и, возможно, пересечется с самой окружностью в точке (0,0). Разложим вектор $f = (\ldots, f_{-n}, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, f_n, \ldots)$ на сумму таких векторов $f^k (k = 0, 1, \ldots, n-1)$, для которых преобразование Фурье $F^k(\Theta)$ вектора f^k равно нулю на множестве точек $[0, 2\pi] \setminus \Delta_k$. Для осуществления этого разложения обозначим через $E_k(\Theta)$ характеристическую функцию множества $\Delta_k (k = 0, 1, \ldots, n-1)$. Тогда вектор f^k определяется составляющими $f_n^k = \sum\limits_{j=-\infty}^{\infty} f_{n-j} a_j^k$, где $\{a_j^k\}_{-\infty}^{\infty}$ – коэффициенты Фурье функции $E_k(\Theta)$.

Аналогичным образом начальный вектор x^0 разложим на сумму векторов $x^{k,0}$, $\quad k = 0, 1, \ldots, n{-}1$. Для решения уравнения (5.3.1) воспользуемся итерационным процессом

$$x_l^{k,m+1} = x_l^{k,m} - \gamma_k\left(\sum_{v=-\infty}^{\infty} a_{l-v} x_v^{k,m} - f_l^k\right), \tag{5.3.3}$$

$$l = \ldots, -n, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, n, \ldots, \quad k = 0, 1, \ldots, n{-}1, \quad m = 0, 1 \ldots,$$

$$x_l^m = \sum_{k=0}^{n-1} x_l^{k,m}. \tag{5.3.4}$$

По аналогии с доказательством, приведенным в разд. 5.2, можно показать, что итерации (5.3.3) сходятся и вектор (5.3.4) сходится к решению уравнения (5.3.1).

5.4. Методы регуляризации при восстановлении входных сигналов

При решении задач восстановления входных сигналов широко используются методы регуляризации.

Рассмотрим уравнение

$$\int_0^t g(t-\tau)x(\tau)d\tau = f(t), \tag{5.4.1}$$

где $x(t)$ и $f(t)$ – соответственно входной и выходной сигналы системы, $g(t)$ – импульсная переходная функция.

Применяя к уравнению (5.4.1) преобразование Лапласа, приходим к уравнению

$$G(p)X(p) = F(p), \tag{5.4.2}$$

где $G(p)$, $X(p)$, $F(p)$ – изображения функций $g(t)$, $x(t)$, $f(t)$ соответственно.

Естественно выразить $X(p)$ из (5.4.2):

$$X(p) = F(p)/G(p),$$

и, применив обратное преобразование Лапласа, вычислить $x(t)$ по формуле

$$x(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{F(p)}{G(p)}e^{tp}dp.$$

Однако из-за несогласованного стремления к нулю функций $F(p)$ и $G(p)$ при $p \to \infty$ интеграл может не существовать.

В связи с этим возникает необходимость прибегнуть к методам регуляризации. В работах [3, 170] рассмотрены методы регуляризации уравнений в свертках вида $\int_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau)x(\tau)d\tau = f(t), -\infty < t < +\infty$. К последнему уравнению применялось преобразование Фурье.

Регуляризованное решение $R_\varphi(t,\alpha)$ ищется по формуле

$$R_\varphi(t,\alpha)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{\varphi(\omega,\alpha)}{G(\omega)}F(\omega)e^{-it\omega}d\omega,$$

где функция $\varphi(\omega,\alpha)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $\varphi(\omega,\alpha)$ определена в области $(\alpha\geq 0,-\infty<\omega<\infty)$;

2) $0\leq\varphi(\omega,\alpha)\leq 1$ для всех значений $\alpha\geq 0$ и $-\infty<\omega<\infty$;

3) $\varphi(\omega,0)\equiv 1$;

4) для всякого $\alpha>0$ $\varphi(\omega,\alpha)$ четная по ω и $\varphi(\omega,\alpha)\in L_2(-\infty,\infty)$;

5) для всякого $\alpha>0, f(\omega,\alpha)\to 0$ при $\omega\to\pm\infty$;

6) при $\alpha\to 0$, $\varphi(\omega,\alpha)\to 1$ не убывая, причем на всяком сегменте $-b\leq\omega\leq b, b>0$ сходимость равномерная;

7) для всякого $\alpha>0$, $\frac{\varphi(\omega,\alpha)}{G(\omega)}\in L_2(-\infty,\infty)$;

8) для всякого $\alpha>0$, $\varphi(\omega,\alpha)\to 0$ при $\alpha\to\infty$ и эта сходимость равномерна на всяком отрезке $[\omega_1,\omega_2]$, $0<\omega_1<\omega_2$.

В работах [3, 170] показано, что вычисление $R_\varphi(x,\alpha)$ устойчиво и оператор $R_\varphi(x,\alpha)$ является регуляризующим для уравнения (5.4.1) в предположении, что $f\in L_2$, $x\in L_1$, а отклонение $x(t)$ от $R_\varphi(x,\alpha)$ оценивается в пространстве C.

Доказательство этого утверждения имеется в [3,170]. Рассмотрим, следуя [23, 38], еще один метод регуляризации для уравнения (5.4.1). Применяя преобразование Лапласа к уравнению (5.4.1), будем иметь $G(p)X(p)=F(p)$. Тогда $X(p)=\frac{F(p)}{G(p)}$.

Функция $F(p)/G(p)$ может иметь различную асимптотику на бесконечности. Рассмотрим несколько отдельных случаев.

Случай 1. Положим, что при $p\to\infty$

$$\frac{F(p)}{G(p)}=O(p^n).$$

Тогда уравнение $G(p)X(p)=F(p)$ может быть представлено в виде $p^nG(p)[X(p/p^n]=F(p)$. Обозначим $X(p)/p^n$ через $X_1(p)$, причем

$$X_1(p)=\frac{F(p)}{G(p)p^n}. \tag{5.4.3}$$

Тогда оригинал $x_1(t)$ можно вычислить обратным преобразованием Лапласа:

$$x_1(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}e^{pt}\left[F(p)/p^nG(p)\right]dp.$$

С другой стороны, так как

$$X_1(p) = X(p)/p^n, \text{то} X(p) = X_1(p)p^n$$

и, следовательно,

$x(t)=x_1^{(n)}(t)$, причем $x_1(0)=x_1'(0)=\ldots=x^{(n-1)}(0)=0$.

Таким образом, для восстановления измеряемого сигнала $x(t)$ необходимо вычислить производную n порядка. Вычисление производных, в свою очередь, является некорректной задачей, подробно исследованной в [170]. Ряд эффективных методов вычисления производных описан в разд. 1.10.

В ряде случаев входной сигнал можно вычислить в аналитической форме.

Из равенства $X_1(p) = \frac{1}{p^n}X(p)$ следует, что

$$x_1(t) = \int\limits_0^t \int\limits_0^{t_1} \int\limits_0^{t_{n-1}} x(\tau)d\tau dt_{n-1}\ldots dt_1.$$

Подставим это выражение в (5.4.3):

$$\int\limits_0^t \int\limits_0^{t_1} \int\limits_0^{t_{n-1}} x(\tau)d\tau dt_{n-1}\ldots dt_1 = Z^{-1}\left(\frac{F(p)}{G(p)p^n}\right).$$

Это равенство эквивалентно следующему:

$$x(t) = \frac{d^n\left(Z^{-1}\left(\frac{F(p)}{G(p)p^n}\right)\right)}{dt^n}. \qquad (5.4.4)$$

Из теоремы о свертке следует, что

$$Z^{-1}\left(\frac{F(p)}{G(p)p^n}\right) = Z^{-1}\left(F(p)\left(\frac{1}{G(p)p^n}\right)\right) =$$

$$= Z^{-1}\left(Z\left(\int\limits_0^t f(t-\tau)Z^{-1}\left(\frac{1}{G(p)p^n}\right)dt\right)\right) =$$

$$= \int\limits_0^t f(t-\tau)Z^{-1}\left(\frac{1}{G(p)p^n}\right)d\tau.$$

Подставляя полученное выражение в (5.4.4), окончательно имеем

$$x(t) = \frac{d^n\left[\int\limits_0^t f(t-\tau)Z^{-1}\left(\frac{1}{G(p)p^n}\right)d\tau\right]}{dt^n}. \qquad (5.4.5)$$

Этот метод при $n = 1$ был использован в [73, с. 155-156] при решении интегрального уравнения Абеля:

$$\int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} x(\tau) d\tau = f(t), \tag{5.4.6}$$

которое встречается во многих задачах физики. Известно, что изображением функции $t^{-\alpha}$ является функция $\frac{\Gamma(1-\alpha)}{p^{1-\alpha}}$, где $\Gamma(\alpha)$ – гамма-функция.

Применив к уравнению (5.4.6) преобразование Лапласа, имеем

$$p^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha)X(p) = F(p).$$

Введем обозначение $X_1(p)=X(p)/p$. Тогда $p^{\alpha}\Gamma(1-\alpha)X_1(p)=F(p)$ и, следовательно, $X_1(p)=\frac{F(p)}{\Gamma(1-\alpha)p^{\alpha}}$. Так как оригиналом, соответствующим изображению $p^{-\alpha}$, является функция $t^{\alpha-1}/\Gamma(\alpha)$, то изображению $X_1(p)$ соответствует оригинал

$$x_1(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} t^{\alpha-1} \times f(t).$$

Известна [73, с. 156] формула

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi}.$$

Следовательно,

$$x_1(t) = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \int_0^t \tau^{\alpha-1} f(t-\tau) d\tau,$$

отсюда

$$x(t) = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \frac{d}{dt} \int_0^t \tau^{\alpha-1} f(t-\tau) d\tau.$$

Если функция $f(t)$ дифференцируема и при $t = 0$ непрерывна, то

$$x(t) = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \left[t^{\alpha-1} f(0) + \int_0^t \tau^{\alpha-1} f'(t-\tau) d\tau \right].$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что функция $x(t)$ является решением уравнения (5.4.6).

При решении уравнений свертки, встречающихся на практике, как правило, свободный член задан с погрешностью. Из формулы (5.4.5) следует, что для получения решения уравнения (5.4.1) необходимо провести n-кратное дифференцирование. В случае, если функция $f(t)$ задана с погрешностью $f(t) = f^*(t) + \varepsilon(t)$, имеющей случайный характер, то операция дифференцирования является некорректной и для ее реализации необходимо применение методов регуляризации [170]. Ряд алгоритмов численного дифференцирования приведен в разд. 1.10.

Случай 2. Применив к уравнению (5.4.1) преобразование Лапласа, получаем алгебраическое уравнение (5.4.2). Перепишем его в виде $G_2(p)X_2(p) = F(p)$, где $G_2(p) = e^{\alpha p}G(p)$, $X_2(p) = e^{-\alpha p}X(p)$. Тогда $X_2(p) = \frac{F(p)}{G(p)e^{\alpha p}}$.

Обозначив через $x_2(t)$ оригинал, соответствующий изображению $X_2(p)$, имеем $x_2(t) = Z^{-1}(F(p)/G(p)e^{\alpha p})$.

По теореме смещения

$$x(t-\alpha)u(t-\alpha) = x_2(t) = \int\limits_{s-i\infty}^{s+i\infty} e^{pt}\frac{F(p)}{G(p)e^{\alpha p}}dp,\ \alpha \le t \le T. \qquad (5.4.7)$$

Функция $x(t)$ может быть восстановлена на сегменте $[0, \alpha]$ продолжением на $[0, \alpha]$ полинома Бернштейна, построенного на сегменте $[\alpha, T]$.

Рассмотрим еще один метод восстановления измеряемого сигнала. Пусть $x(0) = 0$. Пусть известно изображение по Лапласу $X(p) = F(p)/G(p)$ измеряемого сигнала. Будем считать, что функция $X(p)$ аналитическая при $\mathrm{Re}p > c$. Измеряемый сигнал может быть найден из решения уравнения

$$\int\limits_0^\infty x(t)e^{-pt}dt = X(p). \qquad (5.4.8)$$

Для его решения воспользуемся методом коллокации. Приближенное решение уравнения будем искать в виде полинома

$$x_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \exp(-kt),$$

коэффициенты α_k которого определяются из системы алгебраических уравнений:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{k+\upsilon} = X(\upsilon),$$

$$\upsilon = C_0, C_0+1, \ldots, C_0+n-1, \tag{5.4.9}$$

где $C_0 \geq c$ – целое число.

Определитель системы (5.4.9) имеет вид [137]:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{1+C_0} & \frac{1}{2+C_0} & \cdots & \frac{1}{n+C_0} \\ \frac{1}{2+C_0} & \frac{1}{3+C_0} & \cdots & \frac{1}{n+1+C_0} \\ & & \cdots & \\ \frac{1}{n+C_0} & \frac{1}{n+1+C_0} & \cdots & \frac{1}{2n-1+C_0} \end{vmatrix} = \frac{\prod\limits_{1\leq i<k\leq n}(i-k)^2}{\prod\limits_{i,k=1}^{n}(C_0+i-1-k)} \neq 0,$$

где произведение в знаменателе берется по всем i и k, принимающим независимо друг от друга все значения от 1 до n.

В случае, когда $C_0 = 0$, определитель Δ равен

$$\Delta = \frac{[1!2!\ldots(n-1)!]^3}{n!(n+1)!\ldots(2n-1)!} \neq 0.$$

Отсюда следует однозначная решимость системы уравнений (5.4.9).

В ряде случаев предпочтительным оказывается метод, при котором в качестве точек коллокации выбираются точки, расположенные в некотором сегменте $\Delta = [a, b],\ a \geq C_0$. Это связано с тем, что отпадает необходимость в анализе значений функции $X(p)$ при достаточно больших значениях p.

Применим к уравнению (5.4.1) преобразование Фурье. В результате приходим к уравнению $G(\omega)X(\omega) = F(\omega)$.

Пусть функция $G(\omega)$ может обращаться в нуль при конечных значениях ω.

Поставим функции $G(\omega)$ в соответствие семейство функций $G(\omega, \lambda)$, зависящих от неотрицательного параметра λ. Наложим на семейство функций $G(\omega, \lambda)$ следующие условия:

1) $\lim\limits_{\lambda\to 0}(G(\omega, \lambda) = G(\omega)$ в метрике пространства $L_2(-\infty, \infty)$;

2) $G(\omega, \lambda) \neq 0$ при конечных значениях ω;

3) множество значений функции $G(\omega, \lambda)$ при $-T \leq \omega \leq T$, $0 < T < \infty$ лежит внутри угла раствора $\pi - \delta(\lambda, T)$ с вершиной в начале координат, причем $\delta(\lambda, T) > 0$.

Из условия 3 следует, что для каждого λ и T существует такая константа $\gamma(\lambda, T)$, при которой

$$\sup|1 - \gamma(\lambda, T)G(\omega, \lambda)| = q(\lambda) < 1,\ -T \leq \omega \leq T; \tag{5.4.10}$$

4) предположим также, что константа $q(\lambda)$ удовлетворяет соотношению

$$q(\lambda)(1-q(\lambda))^{-1}\|G(\omega, \lambda) - G(\omega)\|_{L_2(-\infty,\infty)} \to 0 \quad \text{при} \quad \lambda \to 0.$$

Рассмотрим уравнение

$$K_\lambda x \equiv \int\limits_{-\infty}^{\infty} g_\lambda(t-\tau)x(\tau)d\tau = f(t), \qquad (5.4.11)$$

где $g_\lambda(t)$ – прообраз функции $G(\omega,\lambda)$.

Из условия (5.4.10) и выкладок, проведенных при доказательстве теоремы 5.2.1, следует, что уравнение (5.4.11) имеет единственное решение $x^*_\lambda(t)$, к которому сходятся последовательные приближения

$$x_{n+1}(t) = x_n(t) - \gamma(\lambda)\int\limits_{-\infty}^{\infty} g_\lambda(t-\tau)x_n(\tau)d\tau + \gamma(\lambda)f(t)$$

со скоростью $\|x^*_\lambda - x_n\|_{L_2(0,\infty)} \le C((q(\lambda)^n)$.

Покажем, что последовательность решений $x^*_\lambda(t)$ уравнений (5.4.11) сходится к решению $x^*(t)$ уравнения (5.4.1).

Оценим норму оператора K^{-1}_λ на множестве функций $f(t)$ при $\sup F(\omega) = [-T,T]$. Из тождества

$$x^*_\lambda(t) = x^*_\lambda(t) - \gamma(\lambda)\int\limits_{-\infty}^{\infty} g_\lambda(t-\tau)x^*_\lambda(\tau)d\tau + \gamma(\lambda)f(t),$$

переходя к нормам в пространстве $L_2(-\infty,\infty)$ ($x(t)\equiv 0$ при $-\infty < t < 0$), имеем

$$\|x^*_\lambda(t)\| = \|X^*_\lambda(\omega)\| \le \max_{-T\le\omega\le T}|1-\gamma(\lambda)G(\omega,\lambda)|\|X^*_\lambda(\omega)\| + |\gamma(\lambda)|\|F(\omega)\| =$$

$$= \max_{-T\le\omega\le T}|1-\gamma(\lambda)G(\omega,\lambda)|\|x^*_\lambda(t)\| + |\gamma(\lambda)|\|f(t)\|.$$

Отсюда следует, что

$$\|x^*_\lambda(t)\| \le |\gamma(\lambda)|\|f(t)\|(1 - \max_{-T\le\omega\le T}|1-\gamma(\lambda)G(\omega,\lambda)|)^{-1}$$

и

$$\|K^{-1}_\lambda\| \le |\gamma(\lambda)|/(1 - \max_{-T\le\omega\le T}|1-\gamma(\lambda)G(\omega,\lambda)|).$$

Оценим близость решений $x^*(t)$ и $x_\lambda(t)$ уравнений (5.4.1) и (5.4.11). Так как $x^*(t) \in L_2(-\infty,\infty)$, то для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое T, что при представлении функции $x^*(t)$ в виде

$x^*(t) = x_1^*(t) + x_2^*(t)$, где $\sup X_1^*(\omega) = [-T, T]$, норма $\|x_2^*(t)\| = \varepsilon$. Из тождества

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_\lambda(t-\tau)(x^*(\tau) - x_\lambda^*(\tau))d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} (g_\lambda(t-\tau) - g(t-\tau))x^*(\tau)d\tau$$

следует, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_\lambda(t-\tau)(x_1^*(\tau) - x_\lambda^*(\tau))d\tau =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} (g_\lambda(t-\tau) - g(t-\tau))x^*(\tau)d\tau - \int_{-\infty}^{\infty} g_\lambda(t-\tau)\left(x^*(\tau) - x_1(\tau)\right)d\tau,$$

поэтому

$$\|x_1^*(t) - x_\lambda^*(t)\| \le \|K_\lambda^{-1}\|\|g(t) - g_\lambda(t)\| \sup |X^*(\omega)| + \|K_\lambda^{-1}\| \sup_\omega |G(\omega, \lambda)|\varepsilon$$

и

$$\|x^*(\tau) - x_\lambda^*(\tau)\| \le \|x^*(\tau) - x_1^*(\tau)\| + \|x_1^*(\tau) - x_2^*(\tau)\| \le$$
$$\le \|K_\lambda^{-1}\|\|g(t) - g_\lambda(t)\| \sup_\omega |X^*(\omega)| + (\|K_\lambda^{-1}\| \sup_\omega |G(\omega, \lambda) + 1)\varepsilon.$$

Таким образом, доказана следующая теорема:

Теорема 5.4.1. *Пусть уравнение* (5.4.1) *имеет единственное решение* $x^*(t) \in L_2(-\infty, \infty)$, *выполнены условия 1 – 4 и, кроме того,*

$$\sup_{(-\infty < \omega < \infty)} |X^*(\omega)| < \infty.$$

Тогда $\lim\limits_{\lambda \to 0. T \to \infty} \|x^*(t) - x_\lambda^*(t)\| = 0$, *где* $x^*(t)$ *и* $x_\lambda^*(t)$ *– решения уравнений* (5.4.1) *и* (5.4.11) *соответственно.*

5.5. Об одновременном определении входного сигнала и импульсной переходной функции

В предыдущих разделах исследовались методы восстановления входных сигналов и нахождения импульсных переходных функций линейных инвариантных к сдвигу систем, функционирование которых описывается уравнением

$$R\varphi = \int_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau)\varphi(\tau)d\tau = f(t), \qquad (5.5.1)$$

где $g(t)$ – импульсная переходная функция; $\varphi(t)$ и $f(t)$ – соответственно входной и выходной сигналы. При этом предполагается, что ядро уравнения (т.е. импульсная переходная функция) известно. Исследование возможности восстановления входных сигналов при неизвестной импульсной переходной функции начато в работах [4,5], где указаны условия, при которых возможно (по крайней мере, теоретически) решение указанной задачи.

Ниже предлагается метод восстановления входных сигналов при неизвестной аппаратной функции, основанный на методах решения краевой задачи Римана [58,59]. При этом наряду с условиями, при которых возможно одновременное восстановление импульсной переходной функции и входного сигнала, предлагается алгоритм нахождения всех наборов импульсных переходных функций и входных сигналов, реализующих выходной сигнал $f(t)$.

Наряду с системами, описываемыми уравнением (5.5.1), ниже рассматриваются дискретные системы, описываемые уравнениями вида

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} g_{k-l}\varphi_l = f_k,\ k = \overline{-\infty,\infty}, \tag{5.5.2}$$

где g_k – импульсная переходная функция; φ_k и f_k – соответственно входной и выходной сигналы, $k = \ldots, -n, \ldots, n, \ldots$, а также многомерные непрерывные и дискретные системы.

5.5.1. Одномерные дискретные системы

В данном разделе рассматриваются различные случаи, когда возможно одновременное восстановление входного сигнала и импульсной переходной функции. При этом рассматриваются модельные задачи, на функционирование которых не влияют шумы и другие дополнительные воздействия.

Для краткости изложения ограничимся случаем, когда известен момент окончания входного сигнала.

Будем предполагать выполненными условия:
1) $g_k = 0$ при $k < 0$;
2) $\varphi_k = 0$ при $k > 0$, т.е. действие входного сигнала заканчивается в момент $k = 0$;
3) выходной сигнал f_k известен при всех $k(-\infty \le k \le \infty)$.

Введем обозначения:

$$f_k^+ = \begin{cases} f_k & \text{при} \quad k \geq 0, \\ 0 & \text{при} \quad k < 0; \end{cases}$$

$$f_k^- = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad k \geq 0, \\ -f_k & \text{при} \quad k < 0. \end{cases}$$

Обозначим через $F(t)=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} f_k t^k$, $t=e^{i\Theta}$, $0\leq\Theta\leq 2\pi$, дискретное преобразование Фурье [59] последовательности f_k; через $F^+(t)$ и $F^-(t)$ обозначаются функции $F^+(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k e^{ik\Theta}$ и $F^-(t) = -\sum\limits_{k=-\infty}^{-1} f_k e^{ik\Theta}$. Известно [59], что функции $F^+(t)$ и $F^-(t)$ – аналитические внутри и вне единичной окружности γ с центром в начале координат. Обозначим через $D^+(D^-)$ область, расположенную внутри (вне) контура γ.

Обозначим через $G^+(t)$ функцию $G^+(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} g_k t^k$, а через $-\Phi^-(t)$ функцию $-\Phi^-(t) \sum\limits_{k=-\infty}^{0} \varphi_k t^k$. Отметим, что $\Phi^-(\infty) = \varphi_0$ и $\varphi_0 \neq 0$.

При условиях 1–3 уравнение (5.5.2) представимо в виде

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} g_{k-l}^+ \varphi_l^- = -f_k,\ k = \ldots -n, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, n \ldots \qquad (5.5.3)$$

Применяя к уравнению (5.5.3) дискретное преобразование Фурье, имеем

$$G^+(t)\Phi^-(t) = -F(t). \qquad (5.5.4)$$

Будем считать индекс χ функции $F(t)$ равным нулю.

Для решения уравнения (5.5.4) проведем факторизацию [58,59] функции $F(t) : F(t) = F^+(t)/F^-(t)$, где

$$F^+(z) = \exp(\Gamma^+(z)),$$

$$F^-(z) = \exp(\Gamma^-(z), \quad \Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{\ln[\tau^{-\chi} F(\tau)]}{\tau - z} d\tau,$$

здесь $z = x + iy$. В результате факторизации и применения теоремы Лиувилля уравнение (5.5.4) примет вид

$$\frac{G^+(z)}{F^+(z)} = -\frac{1}{\Phi^-(z)F^-(z)} = C_0 + \sum_{k=1}^{n} C_k \left(\frac{1}{z - a_k}\right), \qquad (5.5.5)$$

где

$$C_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right)=\frac{C_{1,k}}{z-a_k}+\frac{C_{2,k}}{(z-a_k)^2}+\cdots+\frac{C_{m_k,k}}{(z-a_k)^{m_k}},$$

где a_k – нули функции $\Phi^-(z)$ вне единичной окружности γ ($z\in D^-$); $G^+(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}g_kz^k$, $F^-(z)=-\sum\limits_{k=-\infty}^{-1}f_kz^k$ – преобразование Лорана последовательностей $\{g_k\}_{k=\overline{0,\infty}}$ и $\{-f_k\}_{k=\overline{-\infty,-1}}$.

Замечание 5.5.1. *Так как $\varphi_0\neq 0$, то порядок нуля функции $\Phi^-(z)$ на бесконечности равен нулю.*

Формально из формулы (5.5.5) следует, что

$$G^+(z)=F^+(z)\left(C_0+\sum_{k=1}^{n}C_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right)\right),$$

$$\Phi^-(z)=-\frac{1}{F^-(z)\left(C_0+\sum\limits_{k=1}^{n}C_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right)\right)}. \qquad (5.5.6)$$

В точках $a_k, a_k\in D^-$, функция $\Phi^-(z)$ не определена.

Исследуем полученные выражения для $G^+(z), \Phi^-(z)$. Очевидно, что функция $G^+(z)$ аналитическая в области D^+. Функция $\Phi^-(z)$ аналитическая всюду в расширенной плоскости комплексной переменной за исключением точек $a_k, k=1,2,\ldots,n$, в которых она не определена. Так как из постановки задачи требуется, чтобы функция $\Phi^-(z)$ была аналитической в области D^-, то отсюда следует, что $C_k=0$, $k=1,2,\ldots,n$.

Замечание 5.5.2. *Выше было показано, что из формальных соображений коэффициенты C_k, $k=1,2,\ldots,n$, должны быть равными нулю. Покажем, что если функцию $\Phi^-(z)$ доопределить нулем в точках a_k, $k=1,2,\ldots,n$, то коэффициенты C_k, $k=1,2,\ldots,n$, нужно положить равными нулю.*

Для определенности рассмотрим выражение

$$\frac{1}{\left(C_0+C_1\frac{1}{z-a_1}\right)}=\frac{z-a}{C_0\left(z-a_1+\frac{c_1}{C_0}\right)}.$$

Если коэффициенты a_1 и a_0 такие, что $a_1-\frac{C_1}{C_0}$ лежит в D^-, то функция $\Phi^-(z)$ не является аналитической в D^-; если $a_1-\frac{C_1}{C_0}$ лежит в D^+,

то функция $G^+(z)$ не является аналитической в D^+. Таким образом, в обоих случаях необходимо, чтобы $C_k = 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Окончательно имеем

$$G^+(z) = C_0 F^+(z),\ \Phi^-(z) = -\tfrac{1}{C_0 F^-(z)}. \tag{5.5.7}$$

Получено решение, зависящее от константы C_0.

Применяя к формуле (5.5.7) обратное преобразование Лорана, получаем последовательности g_k и φ_k, определенные с точностью до произвольного параметра. Рассмотрим условия, которые нужно наложить на исходную задачу для получения единственного решения.

Из (5.5.7) следует, что для получения единственного решения необходима дополнительная информация в виде некоторого функционала от G^+ или $\Phi^-(z)$ (или g_k и φ_k).

Замечание 5.5.3. *Остановимся на вопросе об однозначном восстановлении последовательностей φ_k и g_k. Будем рассматривать случаи конечных носителей, так как только они встречаются на практике.*

Покажем, что, кроме неопределенного множителя C_0 в формуле (5.5.7), возможно появление других решений. Если факторизация функции $F(t)$ по формулам (5.5.7) является полиномами

$$G^+(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n, \tag{5.5.8}$$

$$\Phi^-(z) = b_0 + \frac{b_1}{z} + \cdots + \frac{b_k}{z^k}, \tag{5.5.9}$$

то возможна еще одна факторизация функции $F(t)$. Пусть $n \geq k$, тогда

$$F(t) = G^+(z)\Phi^-(z) = (a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n) \times$$
$$\times \left(b_0 + \frac{b_1}{z} + \cdots + \frac{b_k}{z^k} \right) = \left(\frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \cdots + a_n \right) \times$$
$$\times (b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \cdots + b_k z^{n-k}). \tag{5.5.10}$$

Пусть $k \geq n$, тогда

$$F(t) = (a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n) \left(b_0 + \frac{b_1}{z} + \cdots + \frac{b_k}{z^k} \right) =$$
$$= \left(\frac{a_0}{z^k} + \cdots + \frac{a_n}{z^{k-n}} \right) (b_0 z^k + \cdots + b_k). \tag{5.5.11}$$

Из формул (5.5.7)–(5.5.11) следует, что если носители последовательностей φ_k и g_k имеют различную длину, то для их однозначного восстановления достаточно знать и величины n и k, и одно из значений в последовательности φ_k и g_k.

В случае, если последовательности φ_k и g_k имеют одинаковую длину носителя, нужна дополнительная информация. В частности, в ряде случаев достаточно знать два значения в последовательности φ_k или g_k, или по одному значению в каждой из этих последовательностей.

Таким образом, однозначное восстановление при нулевом индексе возможно, если передача сообщения заканчивается одним или двумя тестовыми сигналами.

Пусть теперь индекс $\chi > 0$, тогда

$$\Phi^-(z) = -\frac{1}{z^{-\chi}\exp(\Gamma^-(z))P_\chi(z)}$$
$$= -\frac{1}{\exp(\Gamma^-(z))(a_0 z^{-\chi} + a_1 z^{1-\chi} + \cdots + a_\chi)}.$$

Так как $\Phi^-(\infty) \neq 0$, то коэффициент $a_\chi \neq 0$, а коэффициенты $a_0, a_1, \ldots, a_{\chi-1}$ произвольны. Таким образом, и в этом случае решение зависит от $(\chi+1)$ независимого параметра.

Следовательно,

$$G^+(z) = F^+(z)(a_0 + a_1 z + \cdots + a_\chi z^\chi), \tag{5.5.12}$$

$$\Phi^-(z) = -\frac{z^\chi}{F^-(z)(a_0 + a_1 z + \cdots + a_\chi z^\chi)}. \tag{5.5.13}$$

Таким образом, получено решение уравнения (5.5.4), зависящее от $(\chi+1)$ независимого параметра.

Применяя к (5.5.12), (5.5.13) обратное преобразование Лорана, получаем последовательности g_k и φ_k, зависящие от $(\chi+1)$ параметра.

Если известен $(\chi+1)$ элемент в последовательности g_k или φ_k, то возможно однозначное восстановление этих последовательностей.

Рассмотрим теперь случай, когда индекс χ функции $F(t)$ меньше нуля.

С этой целью представим функцию $F(t)$ в виде $F(t)=t^{-|\chi|}F_1(t)$, где $F_1(t)=t^{|\chi|}F(t)$. В этом случае, функция $F_1(t)$ допускает факторизацию $F_1(t)=\psi^+(t)/\psi^-(t)$. Тогда уравнение (5.5.4) можно представить в виде

$$G^+(t)\Phi^-(t) = -t^{-|\chi|}\frac{\psi^+(t)}{\psi^-(t)},$$

или в эквивалентном виде

$$-\frac{G^+(t)}{\psi^+(t)} = \frac{1}{\Phi^-(t)t^{|\chi|}\psi^-(t)}. \tag{5.5.14}$$

Рассмотрим вначале случай, когда $\Phi^-(\infty) \neq 0$. Это соответствует тому, что $\varphi_0 \neq 0$. Тогда функция $\frac{1}{\Phi^-(z)z^{|\chi|}\psi^-(z)}$ имеет на бесконечности нуль порядка $|\chi|$ и, следовательно, по теореме Лиувилля она тождественно равна нулю. Отсюда следует $G^+(t) \equiv 0$, а уравнение $\frac{1}{\Phi^-(t)t^{|\chi|}\psi^-(t)}$ не имеет решения, т.е. исходная задача не имеет решения.

Пусть функция $\Phi^-(z)$ имеет на бесконечности нуль порядка p, $p \geq 1$. Тогда функция $\Phi^-(z)z^{|\chi|}\psi^-(z)$ имеет на бесконечности полюс порядка $|\chi| - p$ при $|\chi| > p$, равна постоянной при $|\chi| = p$ и имеет нуль порядка $p - |\chi|$ при $|\chi| < p$. Функция $\frac{1}{\Phi^-(t)t^{|\chi|}\psi^-(t)}$ имеет на бесконечности нуль порядка $|\chi| - p$ при $|\chi| > p$, равна константе при $|\chi| = p$ и имеет полюс порядка $p - |\chi|$ при $|\chi| < p$. Следовательно, по теореме Лиувилля функция $\frac{1}{\Phi^-(t)t^{|\chi|}\psi^-(t)}$ тождественно равна нулю при $|\chi| > p$, равна константе при $|\chi| = p$ и является полиномом порядка $p - |\chi|$ при $p > |\chi|$.

Следовательно, по теореме Лиувилля при $|\chi| = p$

$$\frac{G^+(t)}{\psi^+(t)} = -\frac{1}{\Phi^-(t)t^{|\chi|}\psi^-(t)} = C = \text{const}. \tag{5.5.15}$$

Так как функция $\Phi^-(z)$ имеет по предположению на бесконечности нуль порядка p, то из (5.5.14) следует, что при $p \geq |\chi|$

$$\frac{G^+(t)}{\psi^+(t)} = -\frac{1}{\Phi^-(t)t^{|\chi|}\psi^-(t)} = P_{p-|\chi|}(t)$$

и, следовательно,

$$G^+(t) = P_{p-|\chi|}(t)\psi^+(t),$$
$$\Phi^-(t) = -\frac{1}{t^{|\chi|}\psi^-(t)P_{p-|\chi|}(t)} =$$
$$= -\frac{1}{\Psi^-(t)(a_0t^{|\chi|} + a_1t^{|\chi|+1} + \cdots + a_{p-|\chi|}t^p)}. \tag{5.5.16}$$

Из формулы (5.5.16) следует, что если $p = |\chi|$, то уравнение (5.5.4) имеет решение, зависящее от одного параметра. При этом значение $\varphi_{|\chi|}$ должно быть отлично от нуля, а значения $\varphi_0 = \varphi_1 = \cdots = \varphi_{|\chi|-1} = 0$.

При $p > |\chi|$ получаем $p - |\chi| + 1$ линейно независимое решение и, кроме того, замечаем, что при этом необходимо, чтобы $\varphi_0 = \varphi_{-1} = \cdots = \varphi_{p-|\chi|} = 0$. Для однозначного восстановления последовательностей φ_k и g_k нужно знать $-p+1$ элемент последовательности φ_k или g_k. Так как параметр p может принимать произвольное целое число в зависимости от класса, в котором ищется решение уравнения (5.5.4), то при отрицательном индексе задача определения последовательностей g_k и φ_k становится неопределенной.

Проведенное выше исследование позволяет сделать следующий вывод. Однозначное восстановление входного сигнала и аппаратной функции возможно только при следующих условиях:

1) индекс χ функции $F(t)$ неотрицательный и известны значения φ_0, φ_{-1}, $\ldots$, $\varphi_{-|\chi|}$ входного сигнала (или $(\chi+1)$ значения в последовательности g_k);

2) индекс χ отрицательный и $p = |\chi|$. В этом случае существует единственное решение, зависящее от параметра;

3) при $p < |\chi|, \chi < 0$, задача неразрешима. При $p > |\chi|, \chi < 0$, из формулы (5.5.16) следует, что возможно появление полюсов у функции $\Phi^-(z), z \in D^-$, и, следовательно, невозможно гарантировать решение задачи.

5.5.2. Многомерные дискретные системы

Рассмотрим систему, описываемую уравнением

$$\sum_{l_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{l_s=-\infty}^{\infty} g_{k_1-l_1,\ldots,k_s-l_s}\varphi_{l_1,\ldots,l_s} = f_{k_1,\ldots,k_s}, \quad k_1,\ldots,k_s = -\infty,\ldots,\infty. \tag{5.5.17}$$

Будем считать, что система, описанная уравнением (5.5.17), удовлетворяет условию каузальности, т.е. $g_{k_1,\ldots,k_s} = 0$ при $k_i < 0$, $i = 1, 2, \ldots, s$.

Будем также считать, что $\varphi_{l_1,\ldots,l_s} = 0$, если $l_i \geq 1$, $i = 1, 2, \ldots, s$.

Для простоты обозначений положим $l = 2$. Пусть $\gamma_k (k = 1, 2)$ единичная окружность с центром в начале координат в плоскости комплексной переменной z_k; $\gamma_{12} = \gamma_1 \times \gamma_2$ – общий остов четырех биобластей $D^{\pm\pm} = D_1^{\pm} \times D_2^{\pm}$, где $D_i^+ (D_i^-)$ – область, расположенная внутри (вне) окружности $\gamma_i (i = 1, 2)$. Через $F^{\pm\pm}(z_1, z_2)$ обозначим

функции, аналитические в областях $D^{\pm\pm}$ и такие, при которых

$$F^{\pm=}(z_1,\infty)=0\ \forall z_1\in D_1^{\pm},\ F^{=\pm}(\infty,z_2)=0\ \forall z_2\in D_2^{\pm}.$$

Через $F^{\pm\pm}(t_1,t_2)(t_1=e^{i\Theta_1},\ t_2=e^{i\Theta_2},\ 0\le\Theta_1,\ \Theta_2\le 2\pi)$ обозначим предельные значения функций $F^{\pm\pm}(z_1,z_2)$ при независимом стремлении $z_1\to t_1$ и $z_2\to t_2$ по путям, не пересекающим единичные окружности γ_1 и γ_2 соответственно.

Применяя к уравнению (5.5.17) преобразование Лорана, имеем

$$G^{++}(t_1,t_2)\Phi^{--}(t_1,t_2)=F(t_1,t_2). \tag{5.5.18}$$

В монографии [81] исследованы вопросы факторизации и частичной факторизации функции $F(t_1,t_2)$. Для того чтобы функция $F(t_1,t_2)$, не обращающаяся в нуль на контуре γ_{12}, допускала представление в виде

$$F(t_1,t_2)=t_1^p t_2^q F^{++}(t_1,t_2)F^{--}(t_1,t_2), \tag{5.5.19}$$

необходимо и достаточно [81], чтобы выполнялось условие

$$(I-S_{12})F=0,$$

где

$$S_{12}\varphi=-\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{\gamma_{12}}\int\frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1-t_1)(\tau_2-t_2)},\quad (t_1,t_2)\in\gamma_{12}.$$

Здесь p и q – частные индексы функции $F(t_1,t_2)$ по переменным t_1 и t_2 соответственно.

В этом случае

$$F^{\pm\pm}(t_1,t_2)=\exp[P^{\pm\pm}\ln F(t_1,t_2)], \tag{5.5.20}$$

где

$$P^{\pm\pm}=P_1^{\pm}P_2^{\pm},\quad P_l^{+}\varphi=\frac{1}{2}(\varphi+S_{\gamma_l}\varphi),\quad P_l^{-}\varphi=\frac{1}{2}(\varphi-S_{\gamma_l}\varphi),$$

$$S_{\gamma_l}\varphi=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\gamma_l}\frac{\varphi(\tau_l)}{\tau_l-t_l}d\tau_l,\ l=1,2.$$

Воспользовавшись факторизацией (5.5.19), представим уравнение (5.5.18) в виде

$$G^{++}(t_1,t_2)\Phi^{--}(t_1,t_2)=t_1^p t_2^q F_1^{++}(t_1,t_2)F_2^{--}(t_1,t_2).$$

Отсюда следует, что если индексы p и q — неотрицательны, то имеем

$$G^{++}(t_1,t_2)=t_1^p t_2^q F_1^{++}(t_1,t_2),\ \Phi^{--}(t_1,t_2)=F_2^{--}(t_1,t_2). \qquad (5.5.21)$$

Очевидно также определение решений $G^{++}(t_1,t_2)$ и $\Phi^{--}(t_1,t_2)$ при других значениях индексов p и q.

Таким образом, указан способ нахождения одного из решений задачи одновременного определения входного сигнала и импульсной переходной функции.

Эта задача имеет неединственное решение. Например, функции $aG^{++}(t_1,t_2)$ и $\frac{1}{a}\Phi^{--}(t_1,t_2)$ при $a\neq 0$ также являются решением этой задачи. Выбор константы a зависит от дополнительной информации.

Отметим, что имеется целый набор линейно независимых решений уравнения (5.5.18).

В самом деле, наряду с формулами (5.5.22), решением уравнений (5.5.18) являются функции

$$G^{++}(t_1,t_2)=t_1^{v_1}t_2^{v_2}t_1^p t_2^q F_1^{++}(t_1,t_2),$$
$$\Phi^{--}(t_1,t_2)=t_1^{v_1}t_2^{v_2}F_2^{--}(t_1,t_2),$$

где v_1, v_2 — целые неотрицательные числа.

В случае, когда $F_1^{++}(t_1,t_2)$ — полином по степеням t_1 и t_2 до n-го порядка, а $F_1^{--}(t_1,t_2)$ — полином по степеням t_1^{-1} и t_2^{-1} также до n-го порядка, как и в случае одномерных дискретных систем, имеет место решение

$$G^{++}(t_1,t_2)=t_1^p t_2^q F_2^{--}(t_1,t_2)t_1^n t_2^n,$$
$$\Phi^{--}(t_1,t_2)=F_1^{++}(t_1,t_2)t_1^{-n}t_2^{-n}.$$

Поэтому для однозначного определения последовательностей g_{k_1,k_2} и φ_{k_1,k_2} необходима дополнительная информация о некоторых значениях последовательности g_{k_1,k_2} или φ_{k_1,k_2} (или о некоторых значениях в той и другой последовательности).

В качестве такой информации можно использовать значение φ_{k_1,k_2} при $k_1=k_2=0$.

Замечание 5.5.4. *Предложенный алгоритм имеет непосредственное практическое применение в случае, когда отсутствует информация только о части последовательности g_{k_1,k_2}. Несмотря на неполноту решения, изложенный выше метод может быть полезным в ряде случаев.*

Пример 5.5.1. Будем считать, что $\varphi_{k_1k_2} = 0$ при $k_1 \geq 0 \cup k_2 \geq 0$.

Пусть объект описывается уравнением (5.5.17), где $g_{k_1k_2} = g^1_{k_1} g^2_{k_2}$,

$$g^1_k = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad k \neq 2, \\ 1 & \text{при} \quad k = 2; \end{cases} \quad g^2_k = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad k \neq 3, \\ 1 & \text{при} \quad k = 3. \end{cases}$$

Входной сигнал равен

$$\varphi_{k_1k_2} = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad (k_1, k_2) \neq (-1,-1) \cup (-2,-2), \\ 1 & \text{при} \quad (k_1, k_2) = (-1,-1), \\ 1 & \text{при} \quad (k_1, k_2) = (-2,-2). \end{cases}$$

В этом случае выходной сигнал равен

$$f_{k_1k_2} = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad (k_1, k_2) \neq (0,1) \cup (1,2); \\ 1 & \text{при} \quad (k_1, k_2) = (0,1); \\ 1 & \text{при} \quad (k_1, k_2) = (1,2). \end{cases}$$

Определим, располагая значениями функции $f_{k_1k_2}$, входной сигнал и импульсную переходную функцию.

Решение. Применим преобразование Лорана к функции $f_{k_1k_2}$ по каждой переменной. В результате имеем

$$F(t_1, t_2) = t_2 + t_1 t_2^2.$$

Решим уравнение

$$G^{++}(t_1, t_2)\Phi^{--}(t_1, t_2) = t_2 + t_1 t_2^2.$$

Проведем факторизации функции[2] $t_2 + t_1 t_2^2$:

$$t_2 + t_1 t_2^2 = t_1 t_2^3 \left(\tfrac{1}{t_2} + \tfrac{1}{t_1 t_2^2}\right) =$$
$$= t_1^2 t_2^3 \left(\tfrac{1}{t_1 t_2} + \tfrac{1}{t_1^2 t_2^2}\right) = t_1^3 t_2^3 \left(\tfrac{1}{t_1^2 t_2} + \tfrac{1}{t_1^3 t_2^2}\right) = \ldots.$$

Таким образом, получаем следующий набор решений:

$$g_{k_1k_2}{}^{(1)} = \begin{cases} a & \text{при} \quad (k_1, k_2) = (1,3), \\ 0 & \text{при} \quad (k_1, k_2) \neq (1,3), \end{cases}$$

$$\varphi_{k_1k_2}{}^{(1)} = \begin{cases} \frac{1}{a} & \text{при} \quad (k_1, k_2) = (0,-1), \\ \frac{1}{a} & \text{при} \quad (k_1, k_2) = (-1,-2), \\ 0 & \text{при остальных} \quad (k_1, k_2), \end{cases}$$

[2]Из-за простоты функции $F(t_1, t_2) = t_2 + t_1 t_2^2$ факторизация проводится непосредственным подбором функций $F^{++}(t_1, t_2)$ и $F^{--}(t_1, t_2)$, а не применением общей формулы (5.5.20).

$$g_{k_1k_2}{}^{(2)} = \begin{cases} a & \text{при} \quad (k_1,k_2) = (2,3), \\ 0 & \text{при} \quad (k_1,k_2) \neq (2,3), \end{cases}$$

$$\varphi_{k_1k_2}{}^{(2)} = \begin{cases} \frac{1}{a} & \text{при} \quad (k_1,k_2) = (-1,-1), \\ \frac{1}{a} & \text{при} \quad (k_1,k_2) = (-2,-2), \\ 0 & \text{при остальных} \quad (k_1,k_2), \\ \ldots\ldots\ldots & \end{cases}$$

Выбор конкретного решения зависит от априорной информации.

Так, если известно, что $\varphi_{-1,-1} \neq 0$, то из всех возможных факторизаций следует выбрать ту, у которой в $\Phi^{--}(t_1,t_2)$ имеется слагаемое $\frac{1}{t_1t_2}$. Следовательно, решением задачи является набор

$$\left(g^{(2)}_{(k_1,k_2)}, \varphi^{(2)}_{(k_1,k_2)}\right).$$

Для выбора константы α нужна дополнительная информация, например, значения $\varphi_{-1,1}$.

5.5.3. Одномерные непрерывные системы

Рассмотрим задачу восстановления входного сигнала системы, функционирование которой описывается уравнением (5.5.1) (отметим, что в этом разделе t – время). Будем считать выполненными условия:

1) $g(t) = 0$ при $t < 0$;

2) $\varphi(t) = 0$ при $t \geq 0$, т.е. действие входного сигнала прекращается при $t = 0$;

3) выходной сигнал $f(t)$ известен при всех $t(-\infty < t < \infty)$ (по крайней мере, теоретически).

Введем обозначения

$$f^+(t) = \begin{cases} f(t) & \text{при} \quad t \geq 0, \\ 0 & \text{при} \quad t < 0, \end{cases} \quad f^-(t) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad t \geq 0, \\ -f(t) & \text{при} \quad t < 0. \end{cases}$$

Функция комплексной переменной $F(z)(z = x + iy)$ определяемая интегралом

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{izt}dt,$$

называется [59] интегралом Фурье. Через $F^+(z)(F^-(z))$ обозначим функции, аналитические в верхней (нижней) полуплоскости плоскости комплексной переменной. Предельные значения этих функций при стремлении z к вещественной оси обозначим через $F^+(x)(F^-(x))$.

При условиях 1–3 уравнение (5.5.1) можно представить в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau)\varphi^-(\tau)d\tau = -f(t). \tag{5.5.22}$$

Применим к (5.5.22) преобразование Фурье:

$$G^+(x)\Phi^-(x) = -F(x). \tag{5.5.23}$$

Пусть $F(z) = F_1(z)/(z-i)^\lambda$, причем $F_1(x) \neq 0$ на интервале $(-\infty, \infty)$, $F_1(\infty) = 1$, λ – целое число.

Из условий $g(t) = 0$ при $t < 0$ и $\varphi^-(t) = 0$ при $t > 0$ следует [59], что функции $G^+(z)$ и $\Phi^-(z)$ – аналитические в верхней и нижней полуплоскостях.

Проведем факторизацию [59] функции $F_1(\omega)$

$$F_1(x) = F_1^+(x)/F_1^-(x), \tag{5.5.24}$$

где

$$F_1^+(x) = \exp\Gamma^+(z), F_1^-(z) = \left(\frac{z-i}{z+i}\right)^{-\chi} \exp\Gamma^-(z),$$

$$\Gamma^+(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \gamma(t)e^{izt}dt, \;\; \Gamma^-(z) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} \gamma(t)e^{izt}dt,$$

$$\gamma(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \ln F_1(t)e^{-ixt}dt,$$

χ – индекс функции $F_1(\omega)$.

Подставляя в (5.5.23) факторизацию (5.5.24), имеем

$$G^+(t)\Phi^-(t) = -\frac{F_1^+(t)}{F_1^-(t)(t-i)^\lambda}. \tag{5.5.25}$$

Воспользовавшись обобщенной теоремой Лиувилля [59], уравнение (5.5.25) можно представить в виде

$$\frac{G^+(z)}{F_1^+(z)} = -\frac{1}{\left(\frac{z-i}{z+i}\right)}^{-\chi} (\exp\Gamma^-(z))\Phi^-(z)(z-i)^\lambda =$$

$$= P_{p+\chi}(z) + \sum_{k=1}^{l} G_{m_k}\left(\frac{1}{z-a_k}\right), \qquad (5.5.26)$$

где $P_{p+\chi}(z)$ – полином степени $p+\chi$; p – порядок нуля функции $\Phi^-(z)$ на бесконечности; $G_{m_k}\left(\frac{1}{z-a_k}\right) = \frac{G_{11}}{z-a_k} + \cdots + \frac{G_{m_k,k}}{(z-a_k)^{m_k}}$, a_k – нули функции $\Phi^-(z)$.

Отсюда имеем

$$G^+(z) = F_1^+(z)\left(P_{p+\chi} + \sum_{k=1}^{l} G_{m_k}\left(\frac{1}{z-a_k}\right)\right),$$

$$\Phi^-(z) = -\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^{\chi} \frac{1}{(\exp\Gamma^-(z))(z-i)^{\chi}\left(P_{p+\chi}(z) + \sum\limits_{k=1}^{l} G_{m_k}\left(\frac{1}{z-a_k}\right)\right)}.$$

Так как $G^+(z)$ – функция аналитическая в D^+, а $\Phi^-(z)$ – функция аналитическая в D^-, то из предыдущей формулы по построению следует, что $G_{m_k}\left(\frac{1}{z-a_k}\right) = 0, k = 1, 2, \ldots, l$.

Из уравнения (5.5.26) имеем

$$G^+(z) = F_1^+(z) P_{p+\chi}(z), \qquad (5.5.27)$$

$$\Phi^-(z) = -\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^{\chi} \frac{1}{\exp F^-(z)(z-i)^{\lambda}} P_{p+\chi}(z).$$

Применяя обратное преобразование Фурье, находим решение $(g(t), \varphi^-(t))$ исходной задачи, зависящее от коэффициентов полиномов $P_{p+\chi}(z)$, выбор которых обусловлен дополнительной информацией и подобен описанному в разд. 5.5.1.

5.5.4. Многомерные непрерывные системы

Рассмотрим теперь многомерную систему, описываемую уравнением

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} g(t_1-\tau_1, \ldots, t_s-\tau_s)\varphi(\tau_1, \ldots, \tau_s)d\tau_1 \ldots d\tau_s =$$

$$= f(t_1, \ldots, t_s). \qquad (5.5.28)$$

Ниже для простоты обозначений положим $s = 2$.

Будем считать, что $g(t_1, t_2) = 0$ при $(t_1 < 0) \cup (t_2 < 0)$. Будем также считать, что $\varphi(\tau_1, \tau_2) = 0$ при $(\tau_1 > 0) \cup (\tau_2 > 0)$, т.е. функция $\varphi(\tau_1, \tau_2)$ определена в третьем квадранте.

Применяя к уравнению (5.5.28) преобразование Фурье по переменным t_1, t_2 и учитывая сделанные выше предположения, имеем ($z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$)

$$G^{++}(x_1, x_2)\Phi^{--}(x_1, x_2) = F(x_1, x_2). \tag{5.5.29}$$

Пусть функция $F(x_1, x_2)$ представлена в виде

$$F(x_1, x_2) = F_0(x_1, x_2)/((i + x_1)^{\lambda_1}(i + x_2)^{\lambda_2}),$$

где λ_1 и λ_2 – целые числа; $F_0(x_1, x_2) \neq 0$ при $-\infty \leq x_1 \leq \infty$, $-\infty < x_2 \leq \infty$.

Проведя факторизацию функции $F_0(x_1, x_2)$, получим

$$F(x_1, x_2) = x_1^p x_2^q F_0^{++}(x_1, x_2) F_0^{--}(x_1, x_2)(i + x_1)^{-\lambda_1}(i + x_2)^{-\lambda_2}.$$

В результате уравнение (5.5.29) можно записать в виде

$$G^{++}(x_1, x_2)\Phi_0^{--}(x_1, x_2) = x_1^p x_2^q F_0^{++} F_0^{--}(x_1, x_2)(i + x_1)^{-\lambda_1}(i + x_2)^{-\lambda_2}.$$

Из этого уравнения, как и в дискретном случае, находим, по крайней мере, одно решение уравнения (5.5.29). После этого функции $g(t_1, t_2)$ и $\varphi(t_1, t_2)$ находятся применением обратного преобразования Фурье. Однозначное восстановление функций $g(t_1, t_2)$ и $\varphi(t_1, t_2)$ возможно только при наличии дополнительной информации.

5.6. Восстановление входных сигналов объектов с переменной структурой

В предыдущих разделах рассматривалась задача восстановления входных сигналов в случае, если в процессе эксплуатации характеристики системы не меняются.

Рассмотрим задачу восстановления входного сигнала при условии, что режим работы устройства в определенные моменты времени меняется. В этом случае устройство описывается уравнением

$$\sum_{k=0}^{N} \int_{a_k}^{a_{k+1}} g_k(t - \tau)x(\tau)d\tau = f(t). \tag{5.6.1}$$

Будем считать, что система (5.6.1) физически реализуема, т.е. $g_k = 0$ при $t < 0$ для всех $k = 0, 1, \ldots, N$. Для определенности будем рассматривать только положительное время, т.е. $a_0 \geq 0$, $x(t) \equiv 0$ при $t < a_0$.

Исследованию разрешимости уравнения (5.6.1) посвящена статья [156]. Однако полученный в [156] алгоритм трудно реализуем.

Ниже предлагается итерационный метод восстановления входных сигналов в системах, описываемых уравнением (5.6.1).

Обозначим через $G(\omega)$, $X(\omega)$, $F(\omega)$ преобразование Фурье функции $g(t)$, $x(t)$, $f(t)$.

Воспользуемся операторами $p(A)$ и $P(A)$, введенными в [156] и описываемыми следующими равенствами:

$$p(A)f(t) = \begin{cases} f(t) & \text{при} \quad t \in A, \\ 0 & \text{при} \quad t \in CA, \end{cases}$$

$$P(A) = Vp(A)V^{-1},$$

где A – множество из $(-\infty, \infty)$ (здесь A – сегмент), CA – дополнение A до $(-\infty, \infty)$; $V(V^{-1})$ – прямое (обратное) преобразование Фурье.

Будем считать, что для $\forall k (0 \leq k < N)$ выполнено условие A: множество значений $G_k(\omega)$ лежит внутри угла раствора, меньшего π, и, возможно, пересекается с углом в его вершине. Тогда для каждого k существует такое γ_k, что множество $\gamma_k G_k(\omega)$ расположено внутри единичной окружности с центром в точке (1,0) и, возможно, пересекается с нею в точке (0,0).

Введем функцию $z(t)$ формулой $z_k(t) = \gamma_k^{-1} x(t)$ при $t \in [a_k, a_{k+1}]$. Тогда уравнение (5.6.1) можно представить в виде

$$\sum_{k=0}^{N} \gamma_k \int_{a_k}^{a_{k+1}} g_k(t-\tau) z_k(\tau) d\tau = f(t). \tag{5.6.2}$$

К уравнению (5.6.2) применим итерационный процесс:

$$z_0^{n+1}(t) = \alpha_n z_0^n(t) + (1-\alpha_n) \left(z_0^n(t) - \gamma_1 \int_{a_0}^{a_1} g_0(t-\tau) z_0^n(\tau) d\tau + f_0(t) \right),$$

где $f_0(t) = f(t) \quad$ при $\quad a_0 \leq t < a_1$;

$$z_1^{n+1}(t) = \alpha_n z_1^n(t) + \\ + (1-\alpha_n) \left(z_1^n(t) - \gamma_1 \int_{a_1}^{a_2} g_1(t-\tau) z_1^n(\tau) d\tau + f_1(t) \right), \tag{5.6.3}$$

где $f_1(t) = f(t) - \int\limits_{a_0}^{a_1} g_0(t-\tau) z_0^*(\tau) d\tau$ при $a_1 \le t < a_2$;

$$\dots$$

$$z_N^{n+1}(t) = \alpha_n z_N^n(t) + (1-\alpha_n)\left(z_N^n(t) - \gamma_N \int\limits_{a_N}^{a_{N+1}} g_N(t-\tau) z_N^n(\tau) d\tau + f_N(t) \right),$$

$$f_N(t) = f(t) - \int\limits_{a_0}^{a_1} g_0(t-\tau) z_0^*(\tau) d\tau - \dots - \int\limits_{a_{N-1}}^{a_N} g_{N-1}(t-\tau) z_{N-1}^*(\tau) d\tau$$

при $a_N \le t \le a_{N+1}$.

Здесь $z_k^*(t)$ – предел последовательности $z_k^{n+1}(t)$. В правую часть системы (5.6.3) вместо $z_k^*(t)$ можно взять значения $z_k^{n+1}(t)$, на которых прекращаются итерации. Нетрудно установить погрешность при такой замене.

Докажем сходимость итерации (5.6.3), для этого следует доказать сходимость каждой из последовательностей $z_k^n, k = 0, 1, \dots, N$, в отдельности. Для определенности докажем сходимость последовательности $z_0^n(t)$ в метрике пространства $L_2[a_0, a_1]$.

Для этого докажем, что $\|K_0 x(t)\|_{L_2[a_0,a_1]} = 1$,

где $K_0 x \equiv x(t) - \gamma_0 \int\limits_{a_0}^{a_1} g_0(t-\tau) x(\tau) d\tau$.

В самом деле,

$$\|K_0 x(t)\|_{L_2[a_0,a_1]} = \left[\int\limits_{a_0}^{a_1} |x(t) - \gamma_0 \int\limits_{a_0}^{a_1} g_0(t-\tau) x(\tau) d\tau|^2 dt \right]^{1/2} =$$

$$= \left[\int\limits_{a_0}^{a_1} |x(t) - \gamma_0 \int\limits_{-\infty}^{\infty} g_0(t-\tau) p([a_0,a_1]) x(\tau) d\tau|^2 dt \right]^{1/2} \le$$

$$\le \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} |p([a_0,a_1]) x(t) - \gamma_0 \int\limits_{-\infty}^{\infty} g_0(t-\tau) p([a_0,a_1]) x(\tau) d\tau|^2 dt \right]^{1/2} =$$

$$= \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} |P([a_0,a_1]) X(\omega) - \gamma_0 G_0(\omega) P([a_0,a_1]) X(\omega)|^2 d\omega \right]^{1/2} \le$$

$$\le \sup_{\omega} |1 - \gamma_0 G_0(\omega)| \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} |P([a_0,a_1]) X(\omega)|^2 d\omega \right]^{1/2} =$$

$$= \sup_{\omega} |1 - \gamma_0 G_0(\omega)| \left[\int_{-\infty}^{\infty} |p([a_0, a_1])x(t)|^2 dt \right]^{1/2} =$$

$$= \sup_{\omega} |1 - \gamma_0 G_0(\omega)| \|x(t)\|_{L_2[a_0,a_1]} \leq \|x(t)\|_{L_2[a_0,a_1]}.$$

Таким образом, выполнены условия теремы 1.3.1, из которой следует, что последовательность $x_0^n(t)$ сходится к функции $x_0^*(t)$, которая при $a_0 \leq t < a_1$ удовлетворяет уравнению

$$\gamma_0 \left(\int_{a_0}^{a_1} g_0(t-\tau) z_0^*(\tau) d\tau - f(t) \right) = 0.$$

Аналогичным образом доказывается сходимость остальных последовательностей $z_k^n(t)$, $k = 0, 1, \ldots, N$, $n = 0, 1 \ldots$

Вычислив $z_k^n(t)$, по формулам $z_k(t) = \gamma_k^{-1} x(t)$ $(t \in [a_k, a_{k+1}])$ определяем $x(t)$.

Выше предполагалось, что при каждом k $(k = 0, 1, \ldots, N)$ выполнено условие A. Покажем, что предположенный выше итерационный метод применим и при нарушении этого условия. Для простоты изложения предположим, что $k = 0$, т.е. рассматривается уравнение

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau) x(\tau) d\tau = f(t). \tag{5.6.4}$$

Кроме того, будем предполагать, что функция $G(\omega)$ не обращается в нуль при конечных значениях ω.

Пусть для функции $G(\omega)$ условие A не выполняется. Разобьем интервал $(-\infty, \infty)$ на интервалы $\Delta_0{=}(-\infty, T_1)$, $\Delta_k{=}[T_k, T_{k+1})$, $k{=}0, 1, \ldots, N-1$, $\Delta_N{=}[T_N, \infty)$, таким образом, чтобы при изменении ω в интервале Δ_k $(k{=}0, 1 \ldots, N)$ приращение аргумента $G(\omega)$ было меньше π. Каждому интервалу $\Delta_k (k = 0, 1 \ldots, N)$ поставим в соответствие такую константу γ_k, при которой значения $\gamma_k G(\omega)$ при $\omega \in \Delta_k$ лежат внутри единичного круга с центром в точке (1,0). При $k = 1, \ldots, N-1$ такие константы существуют. При $k = 0$ и $k = N$ можно считать, что ω пробегает не интервалы $(-\infty, T_1]$ и $[T_N, \infty)$, а сегменты $[-T, T_1]$ и $[T_N, T]$ при достаточно больших T, и искать приближение к входному сигналу, имеющее спектр, сосредоточенный на сегменте $[-T, T]$.

Обозначим через $E_k(\omega)(k=0,1,2,\ldots,N)$ характеристические функции сегментов Δ_k, а через $x_k(t)$, $g_k(t)$, $f_k(t)$ – прообразы функций $E_k(\omega)X(\omega)$, $E_k(\omega)G(\omega)$, $E_k(\omega)F(\omega)$.

Для нахождения входного сигнала используем итерационный процесс

$$x_k^{n+1}(t) = x_k^n(t) - \gamma_k \int_{-\infty}^{\infty} g_k(t-\tau)x_k^n(\tau)d\tau + \gamma_k f_k(t), \qquad (5.6.5)$$

$$k = 0,1,2,\ldots,N,\ n = 0,1,\ldots$$

Сходимость при $n \to \infty$ каждой из последовательностей x_k^n к функции x_k^* доказывается переходом в частотную область:

$$E_k X^{n+1}(\omega) = E_k X^n(\omega) - \gamma_k E_k G(\omega) E_k X^n(\omega) + \gamma_k E_k F(\omega),$$

и применением в пространстве $L_2(-\infty,\infty)$ теоремы Банаха о сжатых отображениях (см. разд. 1.3.1).

Нетрудно показать, что если $\tilde{x}^*(t) = \sum\limits_{k=0}^{N} x_k^*(t)$ является решением уравнения (5.6.4), то спектр функции $G(\omega)$ сосредоточен на сегменте $[-T,T]$. Если это условие не выполнено, то справедлива оценка $\|x^* - \tilde{x}^*\| < C(\varepsilon)$, где x^* – решение уравнения (5.6.4),

$$\varepsilon = \left[\int_{-\infty}^{-T}(|x^*(t)|^2 + |f(t)|^2)dt + \int_{T}^{\infty}(|x^*(t)|^2 + |f(t)|^2)dt\right]^{1/2},$$

Замечание 5.6.1. *Если спектр $G(\omega)$ обращается в нуль при конечных значениях ω, то и в этом случае возможно применение итерационных методов. Здесь возможно два подхода.*

Первый подход. Пусть $G(T_0) = 0$. Тогда ищем решение $x(t)$ со спектром, носитель которого равен нулю в σ-окрестности T_0. В этом случае функции $E_{j-1}(\omega)$ и $E_j(\omega)$ определяются формулами

$$E_{j-1}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad T_{j-1} \le \omega < T_j - \sigma, \\ 0 & \text{при остальных значениях} \quad \omega, \end{cases}$$

$$E_j(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad T_j + \sigma \le \omega < T_{j+1}, \\ 0 & \text{при остальных значениях} \quad \omega \end{cases}$$

и входной сигнал находится по итерациям (5.6.5).

Второй подход. Вместо итерационного процесса (5.6.5) используется следующий:

$$x_k^{n+1}(t)=\alpha_n x_k^n(t)+(1-\alpha_n)\left(x_k^n(t)-\gamma_k\int\limits_{-\infty}^{\infty}g_k(t-\tau)x_k^n(\tau)d\tau+\gamma_k f_k(t)\right),$$

$0<\beta_0\le\alpha_n\le 1-\beta_1<1,\ k=0,1,\dots,N,\ n=0,1,\dots$

Сходимость этого процесса следует из неравенства

$$\|x_k(t)-\gamma\int\limits_{-\infty}^{\infty}g_k(t-\tau)x_k(\tau)d\tau\|\le\|x_k(t)\|$$

и теоремы 1.3.2 из разд. 1.3.1.

5.7. Восстановление финитных входных сигналов в нелинейных системах

Предлагается метод восстановления финитных входных сигналов для систем, описываемых уравнениями вида

$$\sum_{k=1}^{N}a_k\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}g(t-\tau)x(\tau)d\tau\right)^k=u(t)\qquad(5.7.1)$$

и их многомерными аналогами.

Для сходимости метода достаточно информации о финитности входного сигнала. Выбор единственного решения осуществляется по дополнительной информации. Аналогичные результаты имеют место и для определения финитных импульсных переходных функций.

Одной из важнейших задач в измерительной технике является обратная задача измерительной техники, заключающаяся в восстановлении по известной переходной функции и выходному сигналу входного сигнала, и задача идентификации, заключающаяся в определении импульсной переходной функции по известным входному и выходному сигналам.

Этим задачам посвящена обширная литература, достаточно полная библиография которой приводится в работах [14, 49, 50, 71, 177, 181]. При этом, как правило, рассматриваются линейные системы, описываемые уравнениями в свертках. Так как в силу инвариантности уравнений в свертках задача восстановления входного сигнала по импульсной переходной функции и выходному сигналу

эквивалентна задаче определения импульсной переходной функции по известным входному и выходному сигналам, то в дальнейшем изложение будем вести для первой задачи.

Подробный обзор методов восстановления входных сигналов, искаженных линейными, инвариантными к пространственным и временным сдвигам, системами (т.е. системами, описываемыми уравнениями (5.7.1) при $k = 1$) изложен в монографиях [49, 50, 71]. Итерационные методы восстановления входных сигналов исследовались в [1, 14, 40, 41]. В работах [49, 50, 71] предполагалось, что преобразование Фурье $G(\omega)$ функции $g(t)$ обращается в нуль только при $\omega = \pm\infty$. Случай, когда преобразование Фурье $G(\omega)$ функции $g(t)$ обращается в нуль в конечном числе точек, исследован в [14, 40, 41]. Подробное изложение этих результатов приведено в предыдущих разделах данной книги.

При решении многих практических задач возникает ситуация, когда функция $G(\omega)$ равна нулю на некоторых конечных многообразиях (интервалах, сегментах, объединениях интервалов и сегментов) или очень близка к нулю на конечных многообразиях.

Если при этом входной сигнал $x(t)$ финитен, то его преобразование Фурье $X(\omega)$ является целой функцией , определенной на всей числовой оси $-\infty \leq \omega \leq \infty$.

Преобразование Фурье $U(\omega) = X(\omega)G(\omega)$ сигнала $u(t)$ равно нулю (или близко к нему) на многообразиях, на которых $G(\omega)$ равна или близка к нулю. Следовательно, преобразование Фурье $U(\omega)$ выходного сигнала $u(t)$ не несет всей информации об исследуемом процессе и восстановить входной сигнал применением упомянутых выше методов невозможно. Подробно эта ситуация изложена в [177, с. 288–296].

Случай, когда функция $G(\omega)$ может обращаться в нуль на некоторых многообразиях с мерой, отличной от нуля, исследовался в [177, с. 296–303]. Предложенный в [177] алгоритм требует вычисления производных высоких порядков от функции $U(\omega)/G(\omega)$.

Так как функция $u(t)$ определяется экспериментально, а операция дифференцирования некорректна, то при практическом использовании этот метод может дать большую погрешность. Ниже предлагается метод, дающий значительно меньшую погрешность при его практической реализации.

5.7.1. Линейные системы

Рассмотрим интегральное уравнение

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau)x(\tau)d\tau = u(t). \tag{5.7.2}$$

Обозначим через $X(\omega), G(\omega), U(\omega)$ преобразования Фурье фунуций $x(t)$, $g(t)$, $u(t)$.

Следуя [177], наложим на входной сигнал $x(t)$ следуюшие условия:

1) функция $x(t)$ финитна с носителем $[-a, a]$,

2) полная энергия входного сигнала конечна:

$$\int_{-a}^{a} \mid x(t) \mid^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \mid X(\omega) \mid^2 d\omega < \infty.$$

Требуется восстановить входной сигнал $x(t)$ при условии, что спектр функции $x(t)$ значительно шире спектра функции $g(t)$.

Эта задача была решена [177, с. 296-303] следуюшим образом.

Пусть функция $G(\omega)$ определена и отлична от нуля на сегменте $[-b, b]$ и пусть точка $c \in (-b, b)$. Тогда на сегменте $[-b, b]$ определена функция $X(\omega) = U(\omega)/G(\omega)$. Так как $X(\omega)$ – целая функция, то на всей числовой оси она определятся формулой Тейлора

$$X(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^{(k)}(c)}{k!}(\omega - c)^k. \tag{5.7.3}$$

Напомним, что целой функцией называется функция аналитическая во всей плоскости комплексной переменной.

По вычисленным значениям $X(\omega)$ на конечной сетке узлов с помошью приближенных методов вычисления преобразования Фурье восстанавливается входной сигнал.

При использовании этого метода в практических задачах необходимо вычислять производные $X^{(k)}(c)$ достаточно высокого порядка. Известно, что вычисление производной является некорректной задачей, которая требует методов регуляризации [170]. Поэтому вычисление спектра $X(\omega)$ на числовые оси по формуле (5.7.3) при приближенно определенных значениях $X(\omega)$ на сегменте $[-b, b]$ является чрезвычайно сложной задачей, имеющей большую погрешность.

Ниже предлагается алгоритм, значительно проще реализуемый на практике, устойчивый и имеюший меньшую погрешность.

Пусть функция $G(\omega)$ имеет носитель $[-b,b]$ и пусть $G(\omega)\neq O$ при $\omega\in[-b,b]$. Определим функцию $X(\omega)$ на сегменте $[-b,b]$ с помошью следуюшего итерационного процесса.

Применим к уравнению (5.7.2) преобразование Фурье. В результате имеем

$$X(\omega)G(\omega)=U(\omega).$$

Введем на сегменте $[-b,b]$ сетку узлов $\omega_k{=}{-}b{+}bk/N$, $k{=}0,1,\ldots,2N$. Каждому узлу $\omega_k(k=0,1,\ldots,2N)$ поставим в соответствие комплексную константу γ_k такую, что

$$\mid 1-\gamma_k G(\omega_k)\mid\leq q<1.$$

Из условий, налагаемых на функцию $G(\omega)$, следует, что это всегда возможно.

Вычислим значение $X(\omega_k)$ итерационным методом:

$$X_{n+1}(\omega_k)=X_n(\omega_k)-\gamma_k(G(\omega_k)X_n(\omega_k)-U(\omega_k)),\qquad(5.7.4)$$

$n=0,1,\ldots$

Докажем сходимость итерационного метода (5.7.4). Нетрудно видеть, что для каждого значения $\omega_k, k=0,1,\ldots,2N$,

$$\begin{gathered}\mid X_{n+1}(\omega_k)-X_n(\omega_k)\mid=\\ =\mid (X_n(\omega_k)-X_{n-1}(\omega_k))-\gamma_k G(\omega_k)(X_n(\omega_k)-X_{n-1}(\omega_k))\mid\leq\\ \leq\mid 1-\gamma_k G(\omega_k)\mid\mid X_n(\omega_k)-X_{n-1}(\omega_k)\mid\leq\\ \leq\mid X_n(\omega_k)-X_{n-1}(\omega_k)\mid .\end{gathered}$$

Из этого неравенства и теоремы Банаха 1.3.1 следует сходимость последовательности $X_n(\omega_k)$ к значению $\overline{X}(\omega_k)$ со скоростью

$$\mid\overline{X}(\omega_k)-X_{n+1}(\omega_k)\mid\leq q^n\mid X_1(\omega_k)-X_0(\omega_k)\mid,$$

где $X_0(\omega_k)$ - начальное приближение.

Отметим, что итерационный процесс (5.7.4) обладает свойствами фильтрации и сглаживания, и поэтому вычисления $X(\omega_k)$ целесообразно проводить по схеме (5.7.4), а не делением $U(\omega_k)$ на $G(\omega_k)$.

Прервав вычисления на некотором n, обозначим полученные значения через $X^*(\omega_k), k=0,1,\ldots,2N$. Для продолжения функции $X^*(\omega)$ с сегмента $[-b,b]$ на всю числовую ось воспользуемся полиномом С. Н. Бернштейна:

$$\overline{X}_N(\omega)=B_{2N}(X^*)=$$

$$= \sum_{k=0}^{2N} C_{2N}^k X^* \left(-b + \frac{k}{N} b\right) \left(\frac{\omega + b}{2b}\right)^k \left(\frac{b - \omega}{2b}\right)^{2N-k}. \qquad (5.7.5)$$

Так как функция $x(t)$ финитна, то ее преобразование Фурье $X(\omega)$ является целой функцией. Известно [123, с. 254–256], что для целой функции последовательность ее полиномов Бернштейна B_{2N}, построенных на сегменте $[-b, b]$, сходится к ней равномерно на всей оси.

Из этого утверждения следует, что при $n \to \infty$ и $N \to \infty$ последовательность (5.7.5) сходится к $X(\omega)$ равномерно на всей оси.

Оценим погрешность, которая возникает из-за неточного вычисления значений $X(\omega_k)$.

Пусть $| X(\omega_k) - X^*(\omega_k) | \leq \varepsilon_k$, $k = 0, 1, \ldots, 2N$. Тогда при $| \omega | > b$

$$|B_{2N}(X)(\omega) - B_{2N}(X^*)(\omega)| =$$

$$= \left| \sum_{k=0}^{2N} C_{2N}^k \left(X\left(-b + \frac{k}{N} b\right) - X^*\left(-b + \frac{k}{N} b\right)\right) \times \right.$$

$$\left. \times \left(\frac{\omega + b}{2b}\right)^k \left(\frac{b - \omega}{2b}\right)^{2N-k} \right| \leq$$

$$\leq \left| \sum_{k=0}^{2N} C_{2N}^k \varepsilon_k \left(\frac{\omega + b}{2b}\right)^k \left(\frac{b - \omega}{2b}\right)^{2N-k} \right| \leq$$

$$\leq \varepsilon \sum_{k=0}^{2N} C_{2N}^k \left|\frac{b - \omega}{2b}\right|^{2N-k} \left|\frac{\omega + b}{2b}\right|^k \leq \varepsilon \left|\frac{\omega}{b}\right|^{2N}, \qquad (5.7.6)$$

где $\varepsilon = \max\limits_k |\varepsilon_k|$.

Нетрудно видеть, что эта оценка достижимая. В самом деле, возьмем $\omega = 2b$, $\varepsilon_k = (-1)^k \varepsilon$, тогда

$$| B_{2N}(X)(-2b) - B_{2N}(X^*)(-2b) | \varepsilon \sum_{k=0}^{2N} C_{2N}^k \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{3}{2}\right)^{2N-k} = \varepsilon 2^{2N}.$$

Таким образом, приведенная в (5.7.6) оценка в общем случае не может быть улучшена.

Тем не менее в большинстве случае погрешность, возникающая при решении реальных задач, намного меньше. Введем следующие обозначения: $\varepsilon^* = \frac{1}{2N+1} \sum\limits_{k=0}^{2N} \overline{\varepsilon}_k$, $\overline{\varepsilon}_k = \varepsilon_k - \varepsilon^*$.

Тогда, повторяя проведенные выше выкладки, имеем

$$\mid B_{2N}(X)(w) - B_{2N}(X^*)(w) \mid \leq \varepsilon^* + \overline{\varepsilon}^* \left(\frac{\omega}{b}\right)^{2N},$$

где $\overline{\varepsilon}^* = \max\limits_k \mid \overline{\varepsilon}_k \mid$.

Оценить скорость сходимости полиномов $B_{2N}(X)(\omega)$ к функции $X(\omega)$ в общем случае не представляется возможным, так как для этого необходима предварительная информация об оценках коэффициентов в разложении $X(\omega)$ в ряд по степеням $\omega^k, k = 0, 1, \ldots$

Делая различные предположения о порядке и степени целой функции $X(\omega)$ (определение см. в [177]), можно получить для каждого конкретного случая оценки погрешности $\mid B_{2N}(X) - X \mid$, однако они будут иметь только теоретический интерес, так как для того, чтобы оценить порядок целой функции $X(\omega)$, нужно заранее знать длину сегмента $[a_1, a_2]$, в котором сигнал $x(t)$ отличен от нуля.

В случае, когда функция $X^*(\omega)$ распространяется с сегмента $[-b, b]$ на сегмент $[-d, d]$, где d значительно больше нежели b, возможна следующая модификация предложенного выше метода.

Пусть $L = [d/b]$, где $[a]$ – целая часть числа a. Введем последовательность сегментов $[-b_k, b_k]$, где $b_k = kb, k = 2, \ldots, L - 1$.

Вначале по описанному выше алгоритму распространим функцию $X^*(\omega)$ с сегмента $[-b, b]$ на сегмент $[-b_2, b_2]$. Теперь возьмем сегмент $[-b_2, b_2]$ за исходный. Вычислим значения $X^*(\omega)$ в узлах $\omega_k = -2b + kb/N, k = 0, 1, \ldots, 4N$.

По этим значениям построим полином Бернштейна и распространим функцию $X^*(\omega)$ с сегмента $[-b_2,\ b_2]$ на сегмент $[-b_3,\ b_3]$. Продолжая последовательно этот процесс, восстанавливаем функцию $X^*(\omega)$ на сегменте $[-d, d]$.

Точность этой модификации метода восстановления значительно выше, так как на каждом шаге происходит распространение значений функции на относительно небольшие сегменты $[-b_{k+1},\ -b_k]$, $[b_k,\ b_{k+1}]$.

Отметим, что на каждом шаге распространение можно проводить на еще меньшие сегменты.

После того, как вычислены значения полиномов $B_{2N}(\omega_k)$, где $\omega_k = -d + 2kd/M,\ k = 0, 1, \ldots, M,\ M$ – достаточно большое число, $[-d, d]$ – сегмент на который была распространена функция $X(\omega)$, определяется входной сигнал $x(t)$. Для этого используются квадратурные формулы вычисления преобразования Фурье [76] и методы

итерации [8,128]. При этом, полученную в результате функцию обозначим через $\overline{x}(t)$.

Пример 5.7.1. Пусть динамический объект описывается уравнением (5.7.2), где

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } -A \le t \le A, \\ 0 & \text{при остальных значениях } t. \end{cases}$$

Пусть преобразование Фурье $G(\omega)$ аппаратной функции $g(t)$ равно

$$G(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{при } \omega \in [-\frac{\pi}{10}A, \frac{\pi}{10}A], \\ 0 & \text{при остальных значениях } \omega. \end{cases}$$

При этих условиях преобразование Фурье $U(\omega)$ выходного сигнала $u(t)$ определяется формулой

$$U(\omega) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin A\omega}{\omega} & \text{при } \omega \in [-\frac{\pi}{10}A, \frac{\pi}{10}A], \\ 0 & \text{при остальных значениях } \omega, \end{cases}$$

Решение. Результат восстановления входного сигнала системы $x(t)$ по выходному сигналу $u(t)$ при $A = 1$ приведен в табл. 5.1, в которой приняты обозначения: $t_k = -2A + \frac{Ak}{N}, k = 0, 1, 2, ..., 4N$, $N = 10$, $x(t)$ – входной сигнал; $x_1(t)$ – приближенное значение входного сигнала, вычисленное по предложенному в разделе методу; $x_2(t)$ – приближенное значение входного сигнала, вычисленное без продолжения функции $X(\omega)$ с сегмента $[-b, b]$.

Так как при $k = 21, ..., 40$ значения $x(t_k), x_1(t_k), x_2(t_k)$ равны соответствующим значениям при $k = 0, 1, ..., 20$, то вторая половина таблицы не приводится.

В примере 5.7.1 абсолютная величина погрешности при восстановлении входного сигнала изложенным в разделе методом есть величина порядка 10^{-2} при числе точек дискретизации, равном 11, причем максимальная погрешность возникает в точках разрыва. Относительная погрешность восстанавливаемой функции:

$$\delta_1 = \frac{\sum_{k=0}^{40} \mid x^*(t_k) - \overline{x}(t_k) \mid}{\sum_{k=0}^{40} \mid x^*(t_k) \mid} = 0.3326,$$

относительная среднеквадратичная погрешность:

$$\delta_2 = \frac{\sum_{k=0}^{40} \mid x^*(t_k) - \overline{x}(t_k) \mid^2}{\sum_{k=0}^{40} \mid x^*(t_k) \mid^2} = 0.0939.$$

Таблица 5.1. Результат восстановления входного сигнала $x(t)$ по выходному сигналу $u(t)$ при $A = 1$

k	$x(t)$	$x_1(t)$	$x_2(t)$	$x(t) - x_1(t)$	$x(t) - x_2(t)$
0	0.00000E+00	– 8.79640E-02	3.07808E-01	8.79640E-02	3.07808E-01
1	0.00000E+00	– 8.04081E-02	3.18587E-01	8.04081E-02	3.18587E-01
2	0.00000E+00	– 6.26151E-02	3.29005E-01	6.26151E-02	3.29005E-01
3	0.00000E+00	– 3.35301E-02	3.39034E-01	3.35301E-02	3.39034E-01
4	0.00000E+00	7.47524E-03	3.48647E-01	7.47524E-03	3.48647E-01
5	0.00000E+00	6.05481E-02	3.57817E-01	6.05481E-02	3.57817E-01
6	0.00000E+00	1.25322E-01	3.66520E-01	1.25322E-01	3.66520E-01
7	0.00000E+00	2.00912E-01	3.74732E-01	2.00912E-01	3.74732E-01
8	0.00000E+00	2.85928E-01	3.82430E-01	2.85928E-01	3.82430E-01
9	0.00000E+00	3.78519E-01	3.89594E-01	3.78519E-01	3.89594E-01
10	1.00000E+00	4.76435E-01	3.96202E-01	5.23565E-01	6.03798E-01
11	1.00000E+00	5.77109E-01	4.02238E-01	4.22891E-01	5.97762E-01
12	1.00000E+00	6.77753E-01	4.07684E-01	3.22247E-01	5.92316E-01
13	1.00000E+00	7.75463E-01	4.12526E-01	2.24537E-01	5.87474E-01
14	1.00000E+00	8.67332E-01	4.16750E-01	1.32668E-01	5.83250E-01
15	1.00000E+00	9.50564E-01	4.20344E-01	4.94355E-02	5.79656E-01
16	1.00000E+00	1.02258E+00	4.23298E-01	2.25800E-02	5.76702E-01
17	1.00000E+00	1.08112E+00	4.25605E-01	8.11173E-02	5.74395E-01
18	1.00000E+00	1.12432E+00	4.27257E-01	1.24320E-01	5.72743E-01
19	1.00000E+00	1.15081E+00	4.28250E-01	1.50809E-01	5.71750E-01
20	1.00000E+00	1.15973E+00	4.28581E-01	1.59734E-01	5.71419E-01

Здесь $x^*(t)$ – точное решение уравнения (5.7.2); $\overline{x}(t)$ – приближенное решение, полученное предложенном выше методом. Достаточно большие относительные погрешности связаны с тем, что восстанавливается разрывная функция. В следующем примере будет показано, что при восстановлении гладких функций погрешность значительно меньше.

Отметим, что если непосредственно восстанавливать входной сигнал системы (5.7.2), то погрешность восстановления колеблется от 0.30 до 0.60, а относительные погрешности соответственно равны $\delta_1 = 0.9228, \delta_2 = 0.4624$.

Пример 5.7.2. Рассмотрим измерительный преобразователь, описываемый уравнением (5.7.2) с импульсной переходной функцией $g(t)$, преобразование Фурье которой

$$G(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \le \omega \le 1, \\ 0, & \text{если } \omega \notin [0,1]. \end{cases}$$

Пусть $k = 1,5$. В качестве входного сигнала для системы (5.7.2) возьмем функцию

$$x(t) = \begin{cases} k(1+t), & \text{если } -1 \le t \le -1+\frac{1}{k}, \\ 1, & \text{если } -1+\frac{1}{k} \le t \le 1-\frac{1}{k}, \\ k(1-t), & \text{если } 1-\frac{1}{k} \le t \le 1, \\ 0, & \text{если } t \notin [-1,1]. \end{cases}$$

Преобразование Фурье функции $x(t)$ равно

$$X(\omega) = k\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\cos(\omega(1-\frac{1}{k})) - \cos(\omega)}{\omega^2}.$$

Решение. Результаты восстановления входного сигнала по предложенному выше алгоритму приведены в табл. 5.2, при числе m точек дискретизации функции $X(\omega)$ на сегменте $[0,1]$, равном 11, $k = 3/2$. В табл. 5.2 использованы те же обозначения, что и в табл. 5.1. При этом $\delta_1 = 0.2047, \delta_2 = 0.1466$.

Таблица 5.2. Результаты восстановления входного сигнала для примера 5.7.2

k	$x(t)$	$x_1(t)$	$x_2(t)$	$x(t) - x_1(t)$	$x(t) - x_2(t)$
0	0.00000E+00	3.92634E-02	2.04797E-01	3.92634E-02	2.04797E-01
1	0.00000E+00	2.33623E-02	2.24101E-01	2.33623E-02	2.24101E-01
2	0.00000E+00	1.79940E-02	3.29005E-01	1.79940E-02	3.29005E-01
3	0.00000E+00	–3.20047E-02	2.62253E-01	3.20047E-02	2.62253E-01
4	0.00000E+00	–6.11375E-02	2.80874E-01	6.11375E-02	2.80874E-01
5	0.00000E+00	–8.20560E-02	2.99040E-01	8.20560E-02	2.99040E-01
6	0.00000E+00	–8.76855E-02	3.16641E-01	8.76855E-02	3.16641E-01
7	0.00000E+00	–7.21320E-02	3.33566E-01	7.21320E-02	3.33566E-01
8	0.00000E+00	–3.16169E-02	3.49712E-01	3.16169E-02	3.49712E-01
9	0.00000E+00	3.49300E-02	3.64977E-01	3.49300E-02	3.64977E-01
10	0.00000E+00	1.25709E-01	3.79264E-01	1.25709E-01	3.79264E-01
11	1.50000E-01	2.36329E-01	3.92483E-01	8.63292E-02	2.42483E-01
12	3.00000E-01	3.60438E-01	4.04549E-01	6.04379E-02	1.04549E-01
13	4.50000E-01	4.90575E-01	4.15386E-01	4.05754E-02	3.46137E-02
14	6.00000E-01	6.19070E-01	4.24924E-01	1.90698E-02	1.75076E-01
15	7.50000E-01	7.38819E-01	4.33102E-01	1.11810E-02	3.16898E-01
16	9.00000E 10	8.43840E-01	4.39866E-01	5.61603E-02	4.60134E-01
17	1.00000E+00	9.29533E-01	4.45173E-01	7.04673E-02	5.54827E-01
18	1.00000E+00	9.92684E-01	4.48988E-01	7.31621E-03	5.51012E-01
19	1.00000E+00	1.03128E+00	4.51288E-01	3.12798E-02	5.48712E-01
20	1.00000E+00	1.04425E+00	4.52056E-01	4.42547E-02	5.47944E-01

При дальнейшем увеличении числа точек дискретизации необходимо проводить вычисления с двойной точностью. При этом, результаты восстановления входного сигнала системы (5.7.2) следующие: $\delta_1 = 0.107$, $\delta_2 = 0.082$ при $m = 15$, $k = 1.5$; $\delta_1 = 0.074$, $\delta_2 = 0.043$ при $m = 17$, $k = 1.25$.

5.7.2. Нелинейные системы

Представим уравнение (5.7.1) в виде

$$\sum_{k=1}^{N} a_k z^k(t) = u(t), \tag{5.7.7}$$

где $z(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau)x(\tau)d\tau$.

Уравнение (5.7.7) при каждом фиксированном значении t, как известно из основной теоремы алгебры [114], имеет N корней относительно неизвестной $z(t)$.

Из теории Галуа [133] следует, что в аналитической форме известны решения алгебраических уравнений до пятой степени. Поэтому уравнение (5.7.7) будем решать приближенно.

Введем сетку узлов $t_k = -T + 2kT/M, k = 0, 1, \ldots, M$, где положительное число T такое, что вне сегмента $[-T, T]$ функция $u(t)$ равна нулю.

Будем решать уравнение (5.7.7) при каждом фиксированном значении $t_k (k = 0, 1, \ldots, M)$ одним из численных методов [8], выбирая из N возможных решений только вещественные. При этом может оказаться, что из-за влияния погрешности вычислений уравнения

$$\sum_{k=1}^{N} a_k z^k(t_l) = u(t_l), l = 0, 1, \ldots, M, \tag{5.7.8}$$

имеют комплексные решения, у которых модуль мнимой части примерно равен погрешности вычислений. Действительную часть таких решений будем считать приближенным решением соответствующего уравнения из совокупности решений уравнений (5.7.8).

Пусть в точке t_k имеется r_k вещественных решений. Отметим, что $1 \leq r_k \leq N$, так как по крайней мере одно решение должно быть вещественным в связи с тем, что реальная система имеет вещественный входной сигнал.

Выше было сделано предположение о том, что в каждой точке t_k уравнение (5.7.8) имеет r_k вещественных решений, причем значения r_k могут оказаться различными для различных точек t_k. Пусть $r = \max\limits_k r_k$, т.е. r – это наибольшее число вещественных решений уравнения (5.7.8) на сетке узлов $\{t_l\}, l = 0, 1, \ldots, M$.

Построим r решений уравнения (5.7.8). Построение проводится следуюшим образом. В каждой точке t_k найдем N решений уравнения (5.7.8) (среди них возможны и комплексные): $z_1(t_k), \ldots, z_N(t_k)$, $k = 0, 1, \ldots$ Будем считать, что сетка узлов t_k $(k = 0, 1, \ldots, M)$ достаточно густая.

Число M определяется из величины требуемой погрешности восстановления входного сигнала. Пусть требуется восстановить входной сигнал с точностью ε. Предположим, что функция $g(t)$ удовлетворяет условию Гельдера $H_\alpha(A)$, т.е. $\mid g(t_1) - g(t_2) \mid \leq A \mid t_1 - t_2 \mid^\alpha$. Тогда $u(t) \in H_\alpha(A_1)$ и точность восстановления функции $u(t)$ по M значениям $u(t_k)$ равна $\frac{2A_1T}{M^\alpha}$. Так как погрешность аппроксимации правой части уравнения должна быть не больше, чем предполагаемая точность восстановления входного сигнала, то из условия $\frac{2A_1T}{M^\alpha} \leq \varepsilon$ определяем необходимое число узлов t_k $(k = 0, 1, \ldots, M)$.

Теперь рассмотрим случай, когда функция $g(t)$ принадлежит классу функций $W^r(A)$, т.е. имеет непрерывные производные до $(r-1)$-го порядка включительно и r-ую производную, удовлетворяющую неравенству $\mid g^{(r)}(t) \mid \leq A$. Тогда $u(t) \in W^r(A_1)$, и точность восстановления функции $u(t)$ по M значениям $u(t_k)$ равна $A_2 M^{-r} T^r$.

Так как погрешность аппроксимации правой части уравнения должна быть не больше, чем предполагаемая точность восставновления входного сигнала, то из условия $A_2 T^r M^{-r} \leq \varepsilon$ определяется необходимое число M функционалов $u(t_k)$.

Возьмем в точке t_0 решение $z_1(t_0)$, в точке t_1 из множества значений $(z_1(t_1), \ldots, z_N(t_1))$ выберем значение $z_{n_k}(t_1)$, наиболее близкое к $z_1(t_0)$ (если таких значений несколько, то следует сгустить сетку). В точке t_2 из множества значений $(z_1(t_2), \ldots, z_N(t_2))$ выбирается значение $z_{n_2}(t_2)$ наиболее близкое к $z_{n_1}(t_1)$ и т.д. Полученное решение обозначим через $z_1^*(t)$. Аналогичным образом получаем остальные решения уравнения (5.7.8).

Для восстановления входного сигнала $x_1(t)$ нужно решить уравнение

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau) x_1(\tau) d\tau = z_1^*(t),$$

Метод решения этого уравнения изложен в разделе разд. 5.7.1. Аналогично находятся решения $x_i(t), i = 2, \ldots, r$. Для нахождения единственного решения требуется дополнительная информация. Например, условия вида

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mid x(t) \mid = C \equiv C.$$

Рассмотрим модельный пример, иллюстрирующий эффективность данного метода.

Пример 5.7.3. Пусть динамический объект описывается нелинейным уравнением

$$\int_0^{\infty} g(t-\tau)x(\tau)d\tau + 4(\int_0^{\infty} g(t-\tau)x(\tau)d\tau)^2 = u(t),$$

где

$$x(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t & \text{при } 0 \le t \le 1, \\ \frac{1}{2}(2-t) & \text{при } \le t \le 2, \\ 0 & \text{при } t \notin [0,2], \end{cases}$$

$$g(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin t}{t}.$$

Решение. В данном случае, точно вычислить выходной сигнал $u(t)$ невозможно из-за того, что $\int \frac{\sin t}{t}dt$ не берется в явном виде.

Поэтому на сетке $t_k = -10 + 10k/N, k = 0, 1, \ldots, 2N$, значения $u(t_k)$ вычислялись по квадратурной формуле прямоугольников. Затем решались квадратные уравнения $z_k + 4z_k^2 = u(t_k), k = 0, 1 \ldots, N$, где $z_k = \int_{-\infty}^{\infty} g(t_k - \tau)x(\tau)d\tau$, и по полученным значениям восстанавливались на сетке t_k две функции $\overline{z}(t)$ и $\hat{z}(t)$. Для каждой из этих функций по алгоритму, описанному в разделе разд. 5.7.1 (см. также пример 5.7.2), решалось уравнение (5.7.2), где в качестве правой части были последовательно взяты $\overline{z}(t)$ и $\hat{z}(t)$. Из полученных двух решений выбиралось положительное.

Результаты применения описанного алгоритма приведены в табл. 5.3, где использованы те же обозначения, что и в табл. 5.1. Отметим, что при $\delta_1 = 0,0634$, $\delta_2 = 0,0835$ $m = 19$, $k = 1,25$.

Замечание 5.7.1. *Нетрудно видеть. что изложенные выше алгоритмы применимы и к многомерным уравнениям вида*

$$\sum_{k=1}^{N} a_k \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(t_1 - \tau_1, t_2 - \tau_2)x(\tau_1, \tau_2)d\tau_1 d\tau_2 \right)^k = f(t_1, t_2).$$

Таблица 5.3. Результаты восстановления $x(t)$ для примера 5.7.3

k	$x(t)$	$x_1(t)$	$x_2(t)$	$x(t)-x_1(t)$	$x(t)-x_2(t)$
0	0.000E+0000	2.451E-0002	1.643E-0001	2.451E-0002	1.643E-0001
1	0.000E+0000	2.026E-0002	1.819E-0001	2.026E-0002	1.819E-0001
2	0.000E+0000	9.477E-0003	1.994E-0001	9.477E-0003	1.994E-0001
3	0.000E+0000	−6.497E-0003	2.167E-0001	6.497E-0003	2.167E-0001
4	0.000E+0000	−2.477E-0002	2.338E-0001	2.477E-0002	2.338E-0001
5	0.000E+0000	−4.113E-0002	2.504E-0001	4.113E-0002	2.504E-0001
6	0.000E+0000	−5.048E-0002	2.665E-0001	5.048E-0002	2.665E-0001
7	0.000E+0000	−4.753E-0002	2.820E-0001	4.753E-0002	2.820E-0001
8	0.000E+0000	−2.750E-0002	2.968E-0001	2.750E-0002	2.968E-0001
9	0.000E+0000	1.320E-0002	3.107E-0001	1.320E-0002	3.107E-0001
10	0.000E+0000	7.635E-0002	3.238E-0001	7.635E-0002	3.238E-0001
11	1.250E-0001	1.616E-0001	3.359E-0001	3.658E-0001	2.109E-0001
12	2.500E-0001	2.662E-001	3.470E-0001	1.620E-0002	9.698E-0002
13	3.750E-0001	3.854E-0001	3.569E-0001	1.038E-0002	1.809E-0002
14	5.000E-0001	5.125E-0001	3.657E-0001	1.250E-0002	1.343E-0001
15	6.250E-0001	6.397E-0001	3.732E-0001	1.472E-0002	2.518E-0001
16	7.500E-0001	7.587E-0001	3.794E-0001	8.688E-0003	3.706E-0001
17	8.750E-0001	8.613E-0001	3.842E-0001	1.373E-0002	4.908E-0001
18	1.000E-0000	9.403E-0001	3.877E-0001	5.972E-0002	6.123E-0001
19	1.000E-0000	9.901E-0001	3.898E-0001	9.923E-0003	6.102E-0001
20	1.000E-0000	1.007E+0000	3.905E-0001	7.086E-0003	6.095E-0001

Замечания 5.7.1. . *Предложенные алгоритмы позволяют эффективно восстанавливать входной сигнал в следующих случаях:*

1. Пусть функция $G(\omega)$ обращается в нуль (или очень близка к нулю) на некотором многообразии (в отдельных точках, интервалах, их совокупностях), которое обозначим через D. Тогда преобразование Фурье $X(\omega)$ входного сигнала $x(t)$ вычисляется по изложенному в разд. 5.7.1 итерационному процессу и затем распространяется на многообразие D, причем для каждой изолированной точки, интервала, сегмента, входящих в D, распространение по формуле Бернштейна проводится в отдельности. Кроме того, если $[a,b] \in D$ и функция $X(\omega)$ определена при $\omega < a$ и $\omega > b$, то распространение функции $X(\omega)$ на сегмент $[a,b]$ проводится дважды (как со стороны значений $\omega > b$, так и со стороны значений $\omega < a$, а затем полученные значения осредняются.

2. Метод применим, если функция $G(\omega)$ отлична от нуля на некотором многообразии S. Предположим для определенности, что $S = [a_1, b_1] \cup [a_2, b_2]$.

В этом случае вначале вычисляются значения $X(\omega)$ на множестве S по изложенному в разд. 5.7.1 итерационному методу,

затем восстанавливается по формуле Бернштейна $X(\omega)$ в сегменте $[b_1, a_2]$, а затем уже восстанавливается по формуле Бернштейна $X(\omega)$ вне сегмента $[a_1, b_2]$. Особенно эффективен этот метод, если сегмент $[b_1, a_2]$ достаточно мал и априори известно, что "основная информация", содержащаяся в $X(\omega)$, сосредоточена в сегменте $[a, b]$, длина которого незначительно (в два, три раза) превосходит длину сегмента $[a_1, b_2]$.

5.8. Восстановление входных сигналов динамических систем с распределенными параметрами

5.8.1. Восстановление входных сигналов линейных систем

Рассмотрим измерительный преобразователь, функционирование которого описывается уравнением

$$x(t) + \int_{-1}^{1} g(t,\tau)x(\tau)d\tau = f(t), -1 \le t \le 1. \qquad (5.8.1)$$

Требуется восстановить функцию $x(t)$.

Решение будем искать в виде сплайна. Для этого разделим сегмент $[-1, 1]$ на $2n$ частей точками $t_k = -1 + \dfrac{k}{n}, k = 0, \ldots, 2n$.

На каждом сегменте $[t_k, t_{k+1}], k = 0, 1, \ldots, 2n-1$, решение будем искать в виде полинома по системе ортогональных функций $\{\varphi_i^k(t)\}$, где верхний индекс k указывает, что система функций $\{\varphi_i^k(t)\}$ ортогональна на сегменте $[t_k, t_{k+1}]$:

$$x_k(t) = \begin{cases} \sum\limits_{i=0}^{s} \alpha_i^k \varphi_i^k(t), & t_k \le t \le t_{k+1}, \\ 0, t \notin [t_k, t_{k+1}]. \end{cases} \qquad (5.8.2)$$

Обозначим через $\overline{x_n(t)}$ сплайны, составленные соответственно из функций $x_k(t), k = 1, 2, ..., 2n-1$. Умножим скалярно (5.8.1) на функции $\{\varphi_j^k(t)\}$. В результате получим

$$\int_{-1}^{1} x(t)\varphi_j^k(t)dt + \sum_{m=0}^{2n-1} \int_{t_m}^{t_{m+1}} \left(\int_{-1}^{1} g(t,\tau)\varphi_j^k(t)dt \right) x(\tau)d\tau =$$

$$= \int_{-1}^{1} f(t)\varphi_j^k(t)dt. \tag{5.8.3}$$

Так как решение ищется в виде (5.8.2), то (5.8.3) примет вид

$$\sum_{i=0}^{s} \alpha_i^k \int_{t_k}^{t_{k+1}} \varphi_i^k(t)\varphi_j^k(t)dt +$$

$$+ \sum_{m=0}^{2n-1} \sum_{i=0}^{s} \alpha_i^m \int_{t_m}^{t_{m+1}} \left(\int_{-1}^{1} g(t,\tau)\varphi_j^k(t)dt \right) \varphi_i^m(\tau)d\tau =$$

$$= \int_{-1}^{1} f(t)\varphi_j^k(t)dt, \tag{5.8.4}$$

где $k = 0, \ldots, 2n-1, j = 0, \ldots, s$.

В результате получим систему линейных алгебраических уравнений размерности $2n(s+1) \times 2n(s+1)$ относительно неизвестных коэффициентов α_i^k разложения (5.8.2):

$$\alpha_j^k \left(1 + H_{k,j}^{k,j}\right) + \sum_{m=0, m\neq k}^{2n-1} \sum_{i=0, i\neq j}^{s} \alpha_i^m H_{k,j}^{m,i} = f_j^k, \tag{5.8.5}$$

где

$$H_{k,j}^{m,i} = \int_{t_m}^{t_{m+1}} \left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} g(t,\tau)\varphi_j^k(t)dt \right) \varphi_i^m(\tau)d\tau,$$

$$f_j^k = \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t)\varphi_j^k(t)dt.$$

Покажем, что система линейных уравнений (5.8.5) совместна. Введем оператор

$$Kx \equiv x(t) + \int_{-1}^{1} g(t,\tau)x(\tau)d\tau, \ -1 \le t \le 1. \tag{5.8.6}$$

Будем считать, что оператор K непрерывно обратим в пространстве $C[-1,1]$. Рассмотрим уравнение

$$Kx = f. \tag{5.8.7}$$

Введем проектор P_n, отображающий функцию $x(t)$ на локальный сплайн $\overline{x_n(t)}$. Получим

$$P_n K\overline{x_n(t)} = P_n f_n, \tag{5.8.8}$$

так как $P_n\overline{x_n} = \overline{x_n(t)}$, то (5.8.8) примет вид

$$P_n K\overline{x_n(t)} = f_n. \tag{5.8.9}$$

Для того чтобы уравнение (5.8.9) имело решение, достаточно показать сходимость по норме пространства $C[-1,1]$ операторов P_nK к оператору K. Имеем

$$\|Kx - P_nKx\| = \|\int\limits_{-1}^{1}[g(t,\tau) - P_n^t g(t,\tau)]\,x(\tau)d\tau\| \le$$
$$\le \|x(\tau)\|\|\int\limits_{-1}^{1}[g(t,\tau) - P_n^t g(t,\tau)]\,d\tau\| \le CE_s^t(g(t,\tau),\Delta)\lambda_s,$$

где $E_s^t(g(t,\tau),\Delta) = \max\limits_{k=0,1,\cdots,2n-1} E_s^t(g(t,\tau),\Delta_k)$, $E_s^t(g(t,\tau),\Delta_k)$ – наилучшее равномерное приближение функции $g(t,\tau)$ по переменной t полиномами степени s в сегменте Δ_k; λ_s – константа Лебега.

Таким образом, мы показали, что норма $\|Kx_n - P_nKx_n\| \to 0$ при $n \to \infty$, что доказывает разрешимость системы линейных алгебраических уравнений (5.8.5).

Пусть в качестве ортогональных полиномов берутся полиномы Чебышева первого рода. В том случае, когда $g(t,\tau) \in H_{\alpha,\alpha}(1)$ имеем $\|Kx - P_nKx\| \le \frac{C\ln n}{n^\alpha}\|x\|$. В случае, когда $g(t,\tau) \in W^{r,r}(1)$ имеем $\|Kx - P_nKx\| \le \frac{C\ln n}{n^r}\|x\|$.

Рассмотрим случай функций нескольких переменных.

Рассмотрим уравнение

$$x(t_1,\dots,t_l) +$$
$$+\int\limits_{-1}^{1}\dots\int\limits_{-1}^{1} g(t_1,\dots,t_l,\tau_1,\dots,\tau_l)x(\tau_1,\dots,\tau_l)d\tau_1\dots d\tau_l =$$
$$= f(t_1,\dots,t_l). \tag{5.8.10}$$

Введем узлы $t_k = -1 + \frac{k}{n}$, $k = 0,\dots,2n$.

Решение уравнения (5.8.10) будем искать в виде сплайна

$$x_s(t_1,\dots,t_l)=$$

$$=\begin{cases}\sum\limits_{i_1=0}^{s}\dots\sum\limits_{i_l=0}^{s}\alpha_{i_1,\dots,i_l}\varphi_{i_1,\dots,i_l}^{k_1,\dots,k_l}(t_1,\dots,t_l), t_1,\dots,t_l\in\Delta_{k_1,\dots,k_l}, \\ 0, t_1,\dots,t_l\notin\Delta_{k_1,\dots,k_l},\end{cases} \tag{5.8.11}$$

где $\Delta_{k_1,\dots,k_l}=[t_{1_{k_1}},t_{1_{k_1+1}};t_{2_{k_2}},t_{2_{k_2+1}};\dots;t_{l_{k_l}},t_{l_{k_l+1}}]$ и $\{\varphi_{i_1,\dots,i_l}^{k_1,\dots,k_l}(t_1,\dots,t_l)\}$ система ортогональных полиномов в области $\Delta_{k_1,\dots,k_l}$

Умножив скалярно (5.8.10) на $\{\varphi_{i_1,\dots,i_l}^{k_1,\dots,k_l}(t_1,\dots,t_l)\}$, получим

$$\int\limits_{-1}^{1}\dots\int\limits_{-1}^{1}x(t)\varphi_{i_1,\dots,i_l}^{k_1,\dots,k_l}(t)dt+\sum_{m_1=0}^{2n-1}\dots\sum_{m_l=0}^{2n-1}\int\limits_{t_{1_{m_1}}}^{t_{1_{m+1}}}\dots\int\limits_{t_{l_{m_l}}}^{t_{l_{m_l+1}}}$$

$$\left(\int\limits_{-1}^{1}\dots\int\limits_{-1}^{1}g(t,\tau)\varphi_{i_1,\dots,i_l}^{k_1,\dots,k_l}(t)dt\right)x(\tau)d\tau=$$

$$=\int\limits_{-1}^{1}\dots\int\limits_{-1}^{1}f(t)\varphi_{i_1,\dots,i_l}^{k_1,\dots,k_l}(t)dt; \tag{5.8.12}$$

$$i_1,\dots i_l=0,\dots,s.$$

Здесь $t=(t_1,t_2,...,t_l)$, $\tau=(\tau_1,\tau_2,...,\tau_l)$, $dt=dt_1...dt_l$, $d\tau=d\tau_1$ ..., $d\tau_l$.

Решение будем искать в виде (5.8.11). Тогда предыдушая система линейных уравнений примет вид

$$\sum_{i_1=0}^{s}\dots\sum_{i_l=0}^{s}\alpha_{i_1,\dots,i_l}^{k_1,\dots,k_l}\int\limits_{t_{1_{k_1}}}^{t_{1_{k_1+1}}}\dots\int\limits_{t_{l_{k_1}}}^{t_{l_{k_1+1}}}\varphi_{i_1,\dots,i_l}^{k_1,\dots,k_l}(t)dt+$$

$$+\sum_{m_1=0}^{s}\dots\sum_{m_l=0}^{s}\sum_{i_1=0}^{s}\dots\sum_{i_l=0}^{s}\alpha_{i_1,\dots,i_l}^{k_1,\dots,k_l}\times$$

$$\times\int\limits_{t_{1_{m_1}}}^{t_{1_{m_1+1}}}\dots\int\limits_{t_{l_{m_l}}}^{t_{l_{m_l+1}}}\left(\int\limits_{t_{1_{k_1}}}^{t_{1_{k_1+1}}}\dots\int\limits_{t_{l_{k_1}}}^{t_{l_{k_l+1}}}g(t,\tau)\times\right.$$

$$\left.\times\varphi_{i_1,\dots,i_l}^{k_1,\dots,k_l}(t)dt\right)\varphi_{i_1,\dots,i_l}^{m_1,\dots,m_l}(\tau)d\tau=$$

$$= \int_{t_{1_{k_1}}}^{t_{1_{k_1+1}}} \dots \int_{t_{l_{k_l}}}^{t_{l_{k_l+1}}} f(t)\varphi_{j_1,\dots,j_l}^{k_1,\dots,k_l}(t)dt, \qquad (5.8.13)$$

где $k_1, \dots, k_l = 0, \dots, 2n-1; j_1, \dots, j_l = 0, \dots, s$.

В результате получаем систему линейных алгебраических уравнений порядка $l^2 2n(s+1) \times l^2 2n(s+1)$. Разрешимость полученной системы доказывается точно так же, как и в случае одномерного уравнения.

Пример 5.8.1. Рассмотрим измерительный преобразователь:

$$x(t) + \int_0^2 g(t,\tau)x(\tau)d\tau = f(t),\ 0 \le t \le 2. \qquad (5.8.14)$$

где $g(t,\tau) = \tau(t-\tau)(T-t)(1+t)e^{-\tau}$, $f(t)$ определяется из (5.8.14) при $x(t) = (1+t)^{\frac{3}{2}}e^{-t}$.

Решение. Результаты восстановления входного сигнала приведены в табл. 5.4, где t_k – узлы; $x(t_k)$ – точные значения решения уравнения (5.8.14) в узлах t_k; $\tilde{x}(t_k)$ – приближенные значения; ε – погрешноств метода.

Таблица 5.4. $x(t)$ – точные значения, $\tilde{x}(t)$ – риближенные значения.

Узлы t_k	Точные значения $x(t_k)$	Приближенные значнгтя $\tilde{x}(t_k)$	Погрешность ε
0.0	1.000	1.019	0.019
0.2	1.076	1.082	0.006
0.4	1.110	1.123	0.012
0.6	1.111	1.122	0.011
0.8	1.085	1.095	0.010
1.0	1.041	1.046	0.005
1.2	0.983	0.995	0.012
1.4	0.917	0.992	0.005
1.6	0.846	0.850	0.004
1.8	0.774	0.747	0.033

Из анализа табл. 5.4 следует эффективность изложенного алгоритма.

5.8.2. Восстановление входных сигналов нелинейных систем

Первый случай. Рассмотрим измерительный преобразователь, функционирование которого описывается уравнением следующего вида

$$\int_0^t g(t,\tau)\varphi(x(\tau))d\tau = f(t), \quad 0 \le t \le T. \tag{5.8.15}$$

Требуется, зная выходной сигнал $f(t)$ и импульсную переходную функцию $g(t,\tau)$, восстановить значения входного сигнала $x(t)$ на сегменте [0,T]. Будем считать, что функция $\varphi(x)$ имеет непрерывные производные. Введем обозначения $\psi(\tau) = \varphi(x(\tau))$.

Вместо (5.8.15) рассмотрим уравнение

$$\int_0^t g(t,\tau)\psi(\tau)d\tau = f(t), \quad 0 \le t \le T. \tag{5.8.16}$$

Приближенное представление $\psi(t)$ будем находить в виде полинома

$$\psi_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k t^k. \tag{5.8.17}$$

Для определения коэффициентов $\alpha_k, k = 0, \ldots, n$, воспользуемся методом коллокации, который в данном случае имеет вид

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \int_0^{t_m} g(t_m,\tau)\tau^k d\tau = f(t_m), m = 0, \ldots, n. \tag{5.8.18}$$

Из систем линейных уравнений (5.8.18) найдем искомые значения коэффициентов представления (5.8.17).

Покажем, что система линейных уравнений (5.8.18) однозначно разрешима. Продифференцировав (5.8.16) по t, имеем

$$g(t,t)\psi(t) + \int_0^t g_t'(t,\tau)\psi(\tau)d\tau f'(t).$$

Далее, предполагая, что $g(t,t) \neq 0$ на сегменте $[0,T]$, получим

$$\psi(t) + \int_0^t \frac{g_t'(t,\tau)}{g(t,t)}\psi(\tau)d\tau = \frac{f'(t)}{g(t,t)}. \tag{5.8.19}$$

Это уравнение Вольтерра второго рода, которое однозначно разрешимо. Следовательно, уравнение (5.8.16) имеет единственное решение. Исходя из общей теории приближенных методов [83], приходим к заключению, что система линейных уравнений (5.8.18) однозначно разрешима. Тогда значения $x(t)$ входного сигнала измерительного преобразователя (5.8.15) на сегменте $[0,T]$ найдем из решения нелинейного уравнения

$$\psi_n(\tau) = \varphi(x(\tau)), \tag{5.8.20}$$

решая его методом Ньютона [8].

Пример 5.8.2. Рассмотрим измерительный преобразователь:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \int_0^t g(t,\tau)x^k(\tau)d\tau = f(t), \quad 0 \leq t \leq T. \tag{5.8.21}$$

Требуется восстановить значения входного сигнала $x(t)$ на сегменте $[0,T]$, зная коэффициенты $a_k, k = 1,\ldots,N$, импульсную переходную функцию $g(t,\tau)$ и выходной сигнал $f(t)$.

Здесь $N = 5$; $a_k = k$, $k = 1,2,3,4,5$;

$$g(t,\tau) = \begin{cases} (1+t)e^{-\tau} & \text{при } \tau \leq t, \\ 0 & \text{при } \tau > t, \end{cases}$$

$$f(t) = \frac{1}{2}(e^{\pi+2})(t+1) - \text{выходной сигнал},$$

$$x(t) = \sin t,\ t \in [0,\pi] - \text{выходной сигнал}.$$

Решение. Рассмотрим вместо уравнения (5.8.21) эквивалентное уравнение

$$\int_0^t g(t,\tau)\left[\sum_{k=0}^{N} a_k x^k(\tau)\right]d\tau = f(t),\ 0 \leq t \leq T.$$

Полагая $\psi(t) = \sum\limits_{k=1}^{N} a_k x^k(t)$, найдем вышеописанным способом приближенное представление (5.8.17) функции $\psi(t)$.

Значения $x(t)$ при $0 \le t \le T$, найдем из решения нелинейного уравнения

$$\sum_{k=1}^{N} a_k x^k(t) - \psi_n(t) = 0, 0 \le t \le T.$$

Результаты восстановления входного сигнала $x(t)$ измерительного преобразователя (5.8.21) приведены в табл. 5.5, где t_k – сетка узлов; $x(t)$ – точные значения решения уравнения (5.8.21); $\tilde{x}(t)$ – приближенные значения; $\varepsilon(t_k)$ – погрешность в узлах t_k при $N = 5$.

Таблица 5.5. $x(t)$ – точные значения, $\tilde{x}(t)$ – приближенные значения

Узлы t_k	Точные значения $x(t_k)$	Приближенные значнгтя $\tilde{x}(t_k)$	Погрешность ε
0.157	0.156	0.289	0.133
0.471	0.454	0.422	0.032
0.785	0.707	0.702	0.005
1.100	0.891	0.895	0.004
1.414	0.988	0.986	0.002
1.728	0.988	0.987	0.001
2.042	0.891	0.895	0.004
2.356	0.707	0.699	0.008
2.670	0.454	0.431	0.023
2.985	0.156	0.449	0.293

Второй случай. Рассмотрим измерительный преобразователь более общего вида, чем (5.8.15):

$$s\left(\int_0^t g(t,\tau)\varphi(x(\tau))d\tau\right) = f(t),\ 0 \le t \le T, \tag{5.8.22}$$

где s и φ – нелинейные функции, определенные на сегменте $[0, T]$.

Требуется, располагая значениями ИПФ $g(t,\tau)$ и выходного сигнала $f(t)$, восстановить значения входного сигнала $x(t)$ на сегменте $[0, T]$.

Введем обозначения: $\psi(\tau) = \varphi(x(\tau))$, $v(t) = \int_0^t g(t,\tau)\psi(\tau)d\tau$.

Приближенное представление $\psi(t)$ ищется в виде полинома

$$\psi_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k t^k. \tag{5.8.23}$$

Решение будем искать по следующему алгоритму.

Для определения коэффициентов $\alpha_k, k = 0, \ldots, n$, воспользуемся методом коллокации. Найдем искомые значения коэффициентов представления (5.8.23) из систем линейных уравнений

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \int_0^{t_m} g(t_m, \tau)\tau^k d\tau = v(t_m), m = 0, \ldots, n, \tag{5.8.24}$$

где значения $v(t_m)$ находятся из решения нелинейного уравнения

$$s(v(t)) = f(t) \tag{5.8.25}$$

методом Ньютона [8]. Разрешимость системы (5.8.24) была показана выше.

Тогда значения входного сигнала $x(t)$ измерительного преобразователя (5.8.22) на сегменте $[0, T]$, как и в предыдущем случае, найдем из решения нелинейного уравнения:

$$\psi_n(\tau) = \varphi(x(\tau)), \tag{5.8.26}$$

решая его методом Ньютона.

Пример 5.8.3. Пусть имеется измерительный преобразователь следующего вида:

$$a_1 \int_0^t g(t, \tau)\psi(\tau)d\tau + a_2 \left(\int_0^t g(t, \tau)\psi(\tau)d\tau \right)^2 = f(t),$$

$$\psi(t) = b_1 x(t) + b_2 x^2(t),\ 0 \le t \le T. \tag{5.8.27}$$

при заданных значениях $a_1 = 1, a_2 = 2, b_1 = 1, b_2 = 2$, известных функциях $g(t, \tau) = (1 + t)e^{-\tau}$ и $f(t)$ – выходном сигнале

$$f(t)=2(t+1)^2(e^{-t}-1)^2(\sin t-\cos 2t+1)^2- \\ -(t+1)(e^{-t}-1)(\sin t-\cos 2t+1).$$

При этом входной сигнал будет $x(t) = \sin t$.

Требуется восстановить значения входного сигнала $x(t)$ на сегменте $[0, \pi]$.

Решение. Результаты восстановления входного сигнала $x(t)$ приведены в табл. 5.6, где t_k – сетка узлов; $x(t)$ – точные значения решения уравнения (5.8.27); $\tilde{x}(t)$ – приближенные значения; $\varepsilon(t_k)$ – погрешность в узлах t_k. Приведенные результаты показывают эффективность предлагаемого метода.

Таблица 5.6. Результаты восстановления $x(t)$

Узлы t_k	Точные значения $x(t_k)$	Приближенные значения $\tilde{x}(t_k)$	Погрешность ε
0.157	0.156	0.161	0.005
0.471	0.454	0.461	0.007
0.785	0.707	0.706	0.001
1.100	0.891	0.890	0.001
1.414	0.988	0.988	0.000
1.728	0.988	0.988	0.000
2.042	0.891	0.891	0.000
2.356	0.707	0.712	0.005
2.670	0.454	0.472	0.018
2.985	0.156	0.289	0.133

Погрешность восстановления входного сигнала по описанному методу зависит от погрешности решения нелинейного уравнения (5.8.25), погрешности решения системы линейных уравнений (5.8.24) и погрешности решения нелинейного уравнения (5.8.26). Причем погрешность будет накапливаться по мере решения этих уравнений. Это и показывают результаты табл. 5.5, 5.6 (модельные примеры 5.8.2, 5.8.3). Точность решения уравнений (5.8.25), (5.8.26) исследована в [8]. Решение систем линейных уравнений целесообразнее решать итерационном методом, который приведен в разд. 1.3.1.

5.9. Итерационные методы восстановления пространственных изображений, искаженных системами с аберрациями

При решении различных задач информатики возникает проблема передачи изображений движущихся объектов, а также передача изображений с движущихся объектов. В этом случае возникают искажения, обусловленные движением предметов, а также аберрациями.

Одной из важных задач является задача устранения искажений, обусловленных «смазыванием», из-за движения предметов, другими факторами, вносимыми используемыми системами, а также аберрациями.

Задачу обработки искаженных изображений естественно рассматривать как одну из обратных задач оптики [7, 10, 139].

Подробный обзор методов восстановления входных сигналов, искаженных линейными, инвариантными к пространственным и временным сдвигам системами, изложен в монографиях [49, 50, 153].

Вопросы восстановления изображений, искаженных пространственно-зависимыми системами отображений, исследовались в [144, 155] и в обзоре [166].

В случаях, когда функция рассеивания точки (ФРТ), описывающая размывание, пространственно зависима, реставрация изображения становится невероятно сложной. В этом случае уже не может быть использовано преобразование Фурье для нахождения обратных фильтров, а методы получения оценки оказываются слишком сложными для вывода и реализации.

Один из методов коррекции пространственно зависимых изображений связан [145] с преобразованием всех непрерывно-пространственных функций в дискретную форму с помощью выборки или разложения по функциональному ряду. Теоретически в этом случае можно найти оценку распределения интенсивности излучения исходного объекта, вычислив с помощью численных методов обратные функции, а при наличии шумов – использовав статистическую оценку. Однако эти грубые методы требуют достаточно большого объема вычислений.

Другой подход к восстановлению пространственно зависимых изображений основан на разбиении импульсной реакции на области, имеющие различные пространственно инвариантные ФРТ. Роббинс и Хуанг [144] показали, что в некоторых случаях возможно получение решения в замкнутой форме, если известна импульсная реакция линейной пространственно зависимой искажающей системы.

В данном разделе предлагаются итерационные методы восстановления изображения, искаженного линейной пространственно зависимой системой с аберрациями типа комы. Импульсную реакцию такой системы можно представить в виде $r_1^{-2}h(r_0/r_1, \Theta_0 - \Theta_1)$, где (r_0, Θ_0), (r_1, Θ_1) – полярные координаты точек в выходной и входной плоскостях. Обозначим сигнал на входе системы через $u(r_1, \Theta_1)$; выходной сигнал $\nu(r_0, \Theta_0)$ связан с входным в полярных координатах соотношением [144]:

$$\nu(r_0, \Theta_0) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} h\left(\frac{r_0}{r_1}, \Theta_0 - \Theta_1\right) u(r_1, \Theta_1) r_1^{-1} dr_1 d\Theta_1. \qquad (5.9.1)$$

Как видно из выражения (5.9.1), передающая система инвариантна к сдвигу по Θ и зависима по r. Следовательно, к нему можно применить преобразование Фурье по Θ_0 и Меллина по r_0.

Ниже будет показано, что для сходимости метода достаточно, чтобы функция $\mathfrak{M}h(r,\Theta)$, $\Im h(r,\Theta)$, где $\mathfrak{M}$ и $\Im$ – соответственно операторы преобразований Меллина и Фурье, не обращалась в нуль при конечных значениях ω, z или обращалась в нуль в конечном числе точек или кривых на плоскости (ω, z).

Обозначим через Ω_1, Ω_2, D_1, D_2 соответственно множества $0\leq r<\infty$, $0\leq\Theta\leq\dfrac{2}{\pi}$, $\dfrac{1}{2}-i\infty<p<\dfrac{1}{2}+i\infty$, $-\infty<\omega<\infty$. Напомним преобразования Фурье от периодической функции:

– прямое:

$$\Im f\equiv\tilde{f}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{2\pi}f(\Theta)e^{-i2\pi\omega\Theta}d\Theta;$$

– обратное:

$$\Im^{-1}\tilde{f}\equiv f(\Theta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\tilde{f}(\omega)e^{i2\pi\omega\Theta}d\omega;$$

– нормы:

$$\|f\|_{L_2(\Omega_1)}=\left(\int\limits_{\Omega_1}|f(x)|^2dx\right)^{1/2}=\left(\int\limits_0^{\infty}f(x)\bar{f}(x)dx\right)^{1/2},$$

$$\|f\|_{L_2(\Omega_2)}=\left(\int\limits_{\Omega_2}|f(x)|^2dx\right)^{1/2}=\left(\int\limits_0^{2\pi}f(x)\bar{f}(x)dx\right)^{1/2},$$

$$\|f\|_{L_2(D_2)}=\left(\int\limits_{D_2}|f(x)|^2dx\right)^{1/2}=\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x)\bar{f}(x)dx\right)^{1/2}.$$

Лемма 5.9.1. *Если абсолютно сходится двойной интеграл*

$$\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\infty}|f(\Theta)||\tilde{f}(\omega)|d\Theta d\omega,$$

то

$$\|f(\Theta)\|_{L_2(\Omega_2)}=\|\tilde{f}(\omega)\|_{L_2(D_2)}.$$

Доказательство. Рассмотрим $\|\tilde{f}(\omega)\|_{L_2(D_2)}$:

$$\|\tilde{f}(\omega)\|^2_{L_2(D_2)}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\tilde{f}(\omega)\overline{\tilde{f}(\omega)}d\omega=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{2\pi}f(\Theta)e^{-i2\pi\omega\Theta}d\theta\overline{\tilde{f}(\omega)}d\omega=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{2\pi}f(\Theta)\left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-i2\pi\omega\Theta}\overline{\tilde{f}(\omega)}d\omega\right\}d\Theta=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{2\pi}f(\Theta)\overline{\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{i2\pi\omega\Theta}\tilde{f}(\omega)d\omega}d\Theta=\int\limits_{0}^{2\pi}f(\Theta)\overline{f(\Theta)}d\Theta=\|f(\Theta)\|^2_{L_2(\omega_2)}.$$

Изменение порядка интегрирования законно в силу абсолютной сходимости интеграла $\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\infty}|f(\Theta)||\tilde{f}(\omega)|d\omega d\Theta$.

Лемма 5.9.2. *Пусть функция* $F(p)=\int\limits_0^{\infty}f(t)t^{p-1}dt$ *аналитическая при* $\mathrm{Re}p\geq 0,5$*:*

$$f(t)=(2\pi i)^{-1}\int\limits_{0,5-i\infty}^{0,5+i\infty}F(p)t^{-p}dp.$$

Тогда

$$\|\mathfrak{M}f(t)\|_{L_2(D_1)}=\|F(p)\|_{L_2(D_1)}=\sqrt{2\pi}\|f(t)\|_{L_2(\Omega_1)};$$

$$\|\mathfrak{M}^{-1}F(p)\|_{L_2(\Omega_1)}=\|f(t)\|_{L_2(\Omega_1)}=\left(\int\limits_0^{\infty}|f(t)|^2dt\right)^{1/2}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|F(p)\|_{L_2(D_1)};$$

$$\|F(p)\|_{L_2(D_1)}=\left(i^{-1}\int\limits_{0,5-i\infty}^{0,5+i\infty}|F(p)|^2dp\right)^{1/2}.$$

Доказательство. В преобразовании Меллина $F(p)=\int\limits_0^{\infty}f(t)t^{p-1}dt$ сделаем замены: $t=e^{\nu}$ и $p=c+i\sigma$, тогда

$$F(p)=F(c+i\sigma)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(e^{\nu})e^{\nu(c+i\sigma)}d\nu,$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}F(p)t^{-p}dp=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}F(c+i\sigma)e^{-\nu(c+i\sigma)}d\sigma=f(e^{\nu}).$$

Найдем норму преобразования Меллина в $L_2(c-i\infty,c+i\infty)$. Очевидно,

$$\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}|F(p)|^2dp=i\int\limits_{-\infty}^{\infty}F(c+i\sigma)\overline{F(c+i\sigma)}d\sigma=$$

$$=i\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(e^{\nu})e^{\nu(c+i\sigma)}d\nu\right\}\overline{F(c+i\sigma)}d\sigma=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{\infty}if(e^{\nu})\left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{\nu(c+i\sigma)}\overline{F(c+i\sigma)}d\sigma\right\}d\nu=$$

$$=i\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(e^{\nu})\left\{\overline{\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{\nu(c-i\sigma)}F(c+i\sigma)d\sigma}\right\}d\nu=$$

$$=i\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(e^{\nu})e^{2\nu c}\left\{\overline{\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\nu(c+i\sigma)}F(c+i\sigma)d\sigma}\right\}d\nu=$$

$$=i\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(e^{\nu})2\pi e^{2\nu c}\overline{f(e^{\nu})}d\nu.$$

Таким образом, $\int\limits_{-\infty}^{\infty}|F(c+i\sigma)|^2d\sigma=2\pi\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(e^{\nu})e^{\nu c}|^2d\nu$. Возвращаясь к исходным переменным, получим

$$\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}|F(p)|^2dp=2\pi i\int\limits_{0}^{\infty}|t^cf(t)|^2t^{-1}dt. \tag{5.9.2}$$

Следовательно, норма преобразования Меллина в пространстве $L_2(c-i\infty,c+i\infty)$ будет равна

$$\|F(p)\|=\left\{\frac{1}{i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}|F(p)|^2dp\right\}^{1/2}, \tag{5.9.3}$$

или

$$\|F(p)\|_{L_2(c-i\infty,c+i\infty)} = \sqrt{2\pi}\left(\int\limits_0^\infty |t^c f(t)|^2 t^{-1} dt\right)^{1/2}. \qquad (5.9.4)$$

Оценим норму $\|F(p)\|$ при различных значениях c.

При $c = \dfrac{1}{2}$ имеем $\|F(p)\|_{L_2(D_1)} = \sqrt{2\pi}\|f(t)\|_{L_2(\Omega_1)}$.

При $c \neq \dfrac{1}{2}$ на функцию $f(t)$ необходимо налагать дополнительные ограничения. Рассмотрим случай, когда $c > 1/2$ (случай, когда $c < 1/2$, не рассматривается, так как если функция $F(p)$ аналитическая в области $\mathrm{Re}p > c$, $c \leq 0,5$, то она будет аналитической и в области $\mathrm{Re}p > 0,5$).

Пусть известно, что функция $f(t)$ финитна с носителем $[0, T]$. Тогда из формулы (5.9.4) следует, что

$$\|F(p)\|_{L_2(c-i\infty,c+i\infty)} = (2\pi)^{1/2} T^{c-1/2} \|f(t)\|_{L_2(\Omega_1)}.$$

Доказательство равенства $\|f(t)\| = (2\pi)^{-1/2}\|F(p)\|$ проводится аналогично ($p = 1/2 + i\sigma$).

Применяя к функции $\nu(r, \Theta_0)$, определенной уравнением (5.9.1), преобразование Фурье $\Im$ и преобразование Меллина $\mathfrak{M}$, получим

$$V(p, \omega) = H(p, \omega)U(p, \omega),$$

где

$$U(p, \omega) = \mathfrak{M}\Im(u(r, \Theta)). \qquad (5.9.5)$$

Наложим на функции V, H, U совокупность условий, называемую в дальнейшем условием A. Предположим, что

1) $c = 1/2$ принадлежит области аналитичности функций V, H, U по переменной p;

2) множество значений $z = H(p, \omega)$ при изменении аргументов $p \in D_1$, $\omega \in D_2$ расположено внутри угла, величина которого не превышает π, с вершиной в точке $(0, 0)$ плоскости комплексной переменной z и, возможно, в его вершине;

3) $H(p, \omega) \neq 0$ при конечных значениях p и ω.

Тогда существует такое комплексное число γ, что выполнено условие

$$\sup_{p\in D_1, \omega\in D_2} |1 - \gamma H(p, \omega)| = q \leq 1. \qquad (5.9.6)$$

Замечание 5.9.1. *Если дополнительно известно, что спектр функции $H(p,\omega)$ финитный с носителем в области $D_1 \times D_2$, то*

$$\sup_{p\in D_1,\omega\in D_2} |1-\gamma H(p,\omega)| = q < 1. \tag{5.9.7}$$

Теорема 5.9.1. *Если выполнено условие A и спектр $H(p,\omega)$ финитен, то итерационный процесс*

$$u_{n+1}(r,\Theta) = u_n(r,\Theta) -$$

$$-\gamma \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} h\left(\frac{r}{r_1}, \Theta-\Theta_1\right) u_n(r_1,\Theta_1) r_1^{-1} dr_1 d\Theta_1 + \gamma\nu(r,\Theta) \tag{5.9.8}$$

сходится со скоростью $\|u^* - u_n\| = Cq^n$ к решению $u^*(r,\Theta)$ уравнения (5.9.1).

Доказательство. Оценим норму разности $\|u_{n+1}(r,\Theta) - u_n(r,\Theta)\|$. По лемме 5.9.1 нормы функций $f(\Theta)$ в $L_2(\Omega_2)$ и $\tilde{f}(\omega)$ в $L_2(D_2)$ равны, т.е.

$$\|u_{n+1}(r,\Theta) - u_n(r,\Theta)\| =$$

$$= \|u_n(r,\Theta) - \gamma \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} h\left(\frac{r}{r_1}, \Theta-\Theta_1\right) [u_n(r_1,\Theta_1) -$$

$$-u_{n-1}(r_1,\Theta_1)]\, r_1^{-1} dr_1 d\Theta_1 - u_{n-1}(r,\Theta)\| =$$

$$\|\tilde{u}_n(r,\omega) - \gamma \int_0^{2\pi} \tilde{h}\left(\frac{r}{r_1},\omega\right) [\tilde{u}_n(r_1,\omega) - \tilde{u}_{n-1}(r_1,\omega)] r_1^{-1} dr_1 - \tilde{u}_{n-1}(r,\omega)\|.$$

Далее интегрирование в полученном выражении будем вести только по r_1; ω считаем параметром и применяем преобразование Меллина, норма которого оценена в лемме 5.9.2.

Полагая $p = 0,5 + i\sigma$, $-\infty < \sigma < \infty$, получим

$$\|u_{n+1} - u_n\| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|U_n(p,\omega) - \gamma H(p,\omega)[U_n(p,\omega) - U_{n-1}(p,\omega)] -$$

$$-U_{n-1}(p,\omega)\| = (2\pi)^{-1/2} \|(U_n(p,\omega) - U_{n-1}(p,\omega)) \times$$

$$\times (1-\gamma H(p,\omega))\| < (2\pi)^{-1/2} \sup_{p\in D_1,\omega\in D_2} |1-\gamma H(p,\omega)| \times$$

$$\times \|(U_n(p,\omega) - U_{n-1}(p,\omega))\| = (2\pi)^{-1/2} q \|(U_n(p,\omega) - U_{n-1}(p,\omega))\|.$$

Выполняя последовательно подобные преобразования, получим

$$\|u_{n+1}(r,\Theta)-u_n(r,\Theta)\|<q\|u_n(r,\Theta)-u_{n-1}(r,\Theta))\|<$$

$$<q^n\|u_1(r,\Theta)-u_0(r,\Theta)\|.$$

Воспользовавшись теоремой Банаха о сжатых отображениях (см. раздел 1.3.1), завершаем доказательство теоремы.

Рассмотрим итерационный процесс

$$u_{n+1}(r,\Theta)=\alpha_n u_n(r,\Theta)+(1-\alpha_n)\left[u_n(r,\Theta)-\right.$$

$$\left.-\gamma\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\infty}h\left(\frac{r}{r_1},\Theta-\Theta_1\right)u_n(r_1,\Theta_1)\frac{dr_1}{r_1}d\Theta_1+\gamma\nu(r,\Theta)\right], \qquad (5.9.9)$$

где $0<\varepsilon_0\le\alpha_n\le 1-\varepsilon_1<1$; γ – константа, определяемая из условия $\sup\limits_{p,\omega}|1-\gamma H(0,5+i\sigma,\omega)|\le 1$, $p=c+i\sigma$.

Теорема 5.9.2. *Пусть уравнение* (5.9.1) *имеет единственное решение* $u^*(r,\Theta)$, *выполнено условие* A *и справедливо неравенство* (5.9.6). *Тогда последовательность* $u_n(r,\Theta)$, *определяемая итерационной схемой* (5.9.9), *сходится к* $u^*(r,\Theta)$.

Доказательство. Из условий теоремы и лемм 5.9.1, 5.9.2 следует, что если воспользоваться свойствами преобразований Фурье и Мелина $(p=1/2+i\sigma)$, то

$$\|Ku\|=\|u(r,\Theta)-\gamma\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\infty}h\left(\frac{r}{r_1},\Theta-\Theta_1\right)u(r,\Theta_1)\frac{dr_1}{r_1}d\Theta_1\|=\|u\|,$$

т.е. $\|K\|=1$. При выполнении условия $\|K\|=1$ сходимость итерационного процесса (5.9.8) следует из утверждений теоремы 1.3.1.

Пусть итерационный процесс задан выражением

$$u^T_{n+1}(r,\Theta)=u^T_n(r,\Theta)-\gamma\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\infty}h\left(\frac{r}{r_1},\Theta-\Theta_1\right)u^T_n(r_1,\Theta_1)\frac{dr_1}{r_1}d\Theta_1+$$

$$+\gamma\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\infty}\psi_T\left(\frac{r}{r_1},\Theta-\Theta_1\right)\nu(r_1,\Theta_1)\frac{dr_1}{r_1}d\Theta_1, \qquad (5.9.10)$$

где функция $\psi_T(r,\Theta)$ после последовательного применения преобразования Фурье и преобразования Меллина имеет вид

$$\psi_T(p,\omega)=\left\{\begin{array}{l} 1\,\text{при}\,(|\omega|\le T)\bigcap(|\sigma|\le T),\ c=0,5,\\ 0\,\text{при}\,(|\omega|>T)\bigcup(|\sigma|>T),\ c=0,5.\end{array}\right.$$

Теорема 5.9.3. *Пусть выполнено условие A и уравнение* (5.9.1) *имеет единственное решение* $u^*(r,\Theta)$. *Тогда итерационный процесс* (5.9.10) *сходится при любом начальном приближении* $u_0(r,\Theta)$ *со спектром, сосредоточенным в области* $D:(|\sigma|\le T)\bigcap(|\omega|\le T)$, $c=0,5$ *и справедлива оценка*

$$\|u^*-u_n^T\|\le Cq^n(T)+\xi+|\gamma|\frac{\xi\|h(r,\Theta)\|+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\xi_1}{1-q(T)},\qquad(5.9.11)$$

где

$$\xi_1=\left(\frac{1}{i}\iint\limits_{(D_1\times D_2)\setminus D}|V(p,\omega)|^2dpd\omega\right)^{1/2},$$

$$\xi=\left(\frac{1}{i}\iint\limits_{(D_1\times D_2)\setminus D}|U^*(p,\omega)|^2dpd\omega\right)^{1/2}.$$

Доказательство. Подействуем на функцию $u(r,\Theta)$ последовательно преобразованиями Фурье и Меллина:

$$\mathfrak{M}\Im F(u(r,\Theta))=\mathfrak{M}(\tilde{u}(r,\Theta))=U(p,\omega).$$

Введем множества: $G_1=\Omega_1\times\Omega_2$, $G_2=D_1\times D_2$; нормы:

$$\|u(r,\Theta)\|\|_{L_2(G_1)}=\left\{\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\infty}|u(r,\Theta)|^2drd\Theta\right\}^{1/2},$$

$$\|U(p,\omega)\|_{L_2(G_2)}=\left\{\frac{1}{i}\int\limits_{0,5-i\infty}^{0,5+i\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|U(p,\omega)|^2dpd\omega\right\}^{1/2}.$$

Допустим, что абсолютно сходится интеграл

$$\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\infty}\int\limits_{0,5-i\infty}^{0,5+i\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|u(r,\Theta)||U(p,\omega)|d\omega dpdrd\Theta.$$

Представим p и r в виде $p = 0,5 + i\sigma$, $r = e^{\nu}$. Распишем $\|U(p,\omega)\|^2$:

$$\frac{1}{i}\int\limits_{0,5-i\infty}^{0,5+i\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} U(p,\omega)\bar{U}(p,\omega)dpd\omega =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} U\left(\frac{1}{2}+i\sigma,\omega\right)\overline{U\left(\frac{1}{2}+i\sigma,\omega\right)}d\sigma d\omega =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{2\pi} u(e^{\nu},\Theta)e^{-i2\pi\omega\Theta}d\Theta e^{\nu\left(\frac{1}{2}+i\sigma\right)}d\nu\right]\times$$

$$\times\overline{U\left(\tfrac{1}{2}+i\sigma,\omega\right)}d\sigma d\omega =$$

$$= \int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} u(e^{\nu},\Theta)e^{\nu\left(\frac{1}{2}+i\sigma\right)}d\Theta d\nu\overline{\tilde{u}\left(\frac{1}{2}+i\sigma,\Theta\right)}d\sigma =$$

$$= 2\pi\int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|u(e^{\nu},\Theta)e^{\nu/2}|^2 d\nu d\Theta 2\pi\int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{0}^{\infty}|u(r,\Theta)r^{1/2}|^2\frac{dr}{r}d\Theta =$$

$$= 2\pi\int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{0}^{\infty}|u(r,\Theta)|^2 drd\Theta.$$

В итоге имеем $\|U(p,\omega)\| = \sqrt{2\pi}\|u(r,\Theta)\|$.

Докажем сходимость итерационного процесса (5.9.10) в метрике пространства $L_2(G_2)$:

$$\frac{1}{i}\int\limits_{0,5-i\infty}^{0,5+i\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|U^*(p,\omega)|^2 dpd\omega =$$

$$= \frac{1}{i}\int\limits_{0,5-iT}^{0,5+iT}\int\limits_{-T}^{T}|U^*(p,\omega)|^2 dpd\omega + \frac{1}{i}\int\limits_{G_2/D}\int|U^*(p,\omega)|^2 dpd\omega.$$

Тогда

$$\frac{1}{i}\int\limits_{G_2/D}\int|U^*(p,\omega)|^2 dpd\omega \le \xi^2.$$

Если возьмем в качестве начального приближения функцию $u_0(r,\Theta)$ с финитным спектром, сосредоточенным в области D, то для последовательных приближений $u_n^T(r,\Theta)$, повторяя выкладки, приведенные для доказательства теоремы 5.9.1, будем иметь

$$\|u_{n+1}^T(r,\Theta)-u_n^T(r,\Theta)\|_{L_2(G_1)}<q^n(T)\|u_1^T(r,\Theta)-u_0(r,\Theta)\|_{L_2(G_1)}.$$

По условию A $q(T)<1$ и, следовательно, по теореме Банаха о сжатых отображениях, последовательность $u_n^T(r,\Theta)$ сходится к решению $u^{*T}(r,\Theta)$ уравнения

$$\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\infty} h\left(\frac{r}{r_1},\Theta-\Theta_1\right)u(r_1,\Theta_1)\frac{dr_1}{r_1}d\Theta_1=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\infty}\psi_T\left(\frac{r}{r_1},\Theta-\Theta_1\right)\nu(r_1,\Theta_1)\frac{dr_1}{r_1}d\Theta_1. \qquad (5.9.12)$$

Оценим близость решений $u^*(r,\Theta)$ и $u^{*T}(r,\Theta)$ уравнений (5.9.1) и (5.9.12).

Представим функцию $U^*(p,\omega)$ в виде $U_1^*(p,\omega)+U_2^*(p,\omega)$, где

$$U_1^*(p,\omega)=\begin{cases} U(p,\omega),\ (p,\omega)\in D,\\ 0,\ (p,\omega)\notin D;\end{cases}$$

$$U_2^*(p,\omega)=\begin{cases} 0,\ (p,\omega)\in D,\\ U(p,\omega),\ (p,\omega)\notin D.\end{cases}$$

Пусть $u_1^*(r,\Theta)$ и $u_2^*(r,\Theta)$ - результаты последовательных обратных преобразований Фурье и Меллина функций $U_1^*(p,\omega)$ и $U_2^*(p,\omega)$.

Верно равенство

$$u_1^*-u^{*T}=u_1^*(r,\Theta)-u^{*T}(r,\Theta)-\gamma\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\infty}h\left(\frac{r}{r_1},\Theta-\Theta_1\right)(u_1^*(r_1,\Theta_1)-$$

$$-u^{*T}(r,\Theta))\frac{dr_1}{r_1}d\Theta_1+\gamma\nu(r,\Theta)-\gamma\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\infty}\psi_r\left(\frac{r}{r_1},\Theta-\Theta_1\right)\nu(r_1,\Theta_1)\frac{dr_1}{r_1}d\Theta_1-$$

$$-\gamma\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\infty}h\left(\frac{r}{r_1},\Theta-\Theta_1\right)u_2^*(r_1,\Theta_1)\frac{dr_1}{r_1}d\Theta_1.$$

Переходя к нормам, будем иметь

$$\left\|u_1^*(r,\Theta)-u^{*T}(r,\Theta)\right\|_{L_2(G_1)}=\|u_1^*(r,\Theta)-u^{*T}(r,\Theta)-$$

$$-\gamma\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\infty}h\left(\frac{r}{r_1},\Theta-\Theta_1\right)[(u_1^*(r_1,\Theta_1)-u^{*T}(r_1,\Theta_1)]\frac{dr_1}{r_1}d\Theta_1+\gamma\nu(r,\Theta)-$$

$$-\gamma\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\infty}\psi_r\left(\frac{r}{r_1},\Theta-\Theta_1\right)\nu(r_1,\Theta_1)\frac{dr_1}{r_1}d\Theta_1-$$

$$-\gamma\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\infty}h\left(\frac{r}{r_1},\Theta-\Theta_1\right)u_2^*(r_1,\Theta_1)\frac{dr_1}{r_1}d\Theta_1\Bigg\|_{L_2(G_1)}=$$

$$=(2\pi)^{-1/2}\|U_1^*(p,\omega)-U^{*T}(p,\omega))(1-\gamma H(p,\omega))+\gamma(V(p,\omega)-$$

$$-\psi(p,\omega)V(p,\omega))+\gamma H(p,\omega))U_2^*(p,\omega)\|_{L_2(G_2)}=q(T)\|u_1^*(r,\Theta)-$$

$$-u^{*T}(r,\Theta)\|_{L_2(G_1)}+(2\pi)^{-1/2}\xi_1|\gamma|+|\gamma|\xi\|h(r,\Theta)\|_{L_2(G_1)}.$$

В итоге имеем

$$\|u_1^*(r,\Theta)-u^{*T}(r,\Theta)\|_{L_2(G_1)}(1-q(T))\le|\gamma|\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\xi_1+\xi\|h(r,\Theta)\|_{L_2(G_1)}\right).$$

Учитывая, что

$$\|u^*-u^{*T}\|_{L_2(G_1)}\le\|u_1^*-u^{*T}\|_{L_2(G_1)}+\|u_2^*\|_{L_2(G_1)},$$

получаем

$$\|u^*-u^{*T}\|_{L_2(G_1)}\le C\left(|\gamma|\frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\xi_1+\xi\|h(r,\Theta)\|_{L_2(G_1)}}{1-q(T)}+\|u_2^*\|_{L_2(G_1)}+\xi\right).$$

Пусть теперь не выполнено условие A. Введем числа T_0^ω, T_N^ω, T_0^σ, T_L^σ, достаточно большие по абсолютной величине. Введем прямоугольники $\Delta_{kj}=[T_{k-1}^\omega,T_k^\omega;T_{j-1}^\sigma,T_j^\sigma]$, $k=\overline{1,N}$, $j=\overline{1,L}$; $-T\le T_0^\omega<T_1^\omega<\cdots<T_N^\omega\le T$, $-T\le T_0^\sigma<T_1^\sigma<\cdots<T_L^\sigma\le T$. Каждому прямоугольнику Δ_{kj} поставим в соответствие комплексную константу γ_{kj} такую, чтобы множество значений функции $\gamma_{kj}H(p,\omega)$ удовлетворяло условию A. Обозначим через $E_{kj}(p,\omega)$, $k=\overline{1,N}$; $j=\overline{1,L}$, характеристические функции областей Δ_{kj}, а через $u_{kj}^*(r,\Theta)$, $u_{kj}^0(r,\Theta)$, $\nu_{kj}(r,\Theta)$ прообразы функций $E_{kj}(p,\omega)U^*(p,\omega)$, $E_{kj}(p,\omega)U^0(p,\omega)$, $E_{kj}(p,\omega)V(p,\omega)$.

Для нахождения решения $u^*(r,\Theta)$ будем использовать итерационный процесс

$$u^{n+1}(r,\Theta)=\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{L}u_{kj}^{n+1}(r,\Theta), \tag{5.9.13}$$

где

$$u_{kj}^{n+1}(r,\Theta)=u_{kj}^{n}(r,\Theta)-$$
$$-\gamma_{kj}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}h\left(\frac{r}{r_1},\Theta-\Theta_1\right)u_{kj}^{n}(r_1,\Theta_1)\frac{dr_1}{r_1}d\Theta_1+\gamma_{kj}\nu_{kj}(r,\Theta), \tag{5.9.14}$$
$$n=0,1,2...;\ k=1,2,...,N;\ j=1,2,...,L.$$

Теорема 5.9.4. *Пусть уравнение* (5.9.1) *имеет решение* $u^*(r,\Theta)$. *Тогда последовательные приближения* $u^{n+1}(r,\Theta)$ *сходятся к* $u^*(r,\Theta)$ *и верна оценка* (5.9.11), *где*

$$\gamma=\max_{0\le k\le N,0\le j\le L}|\gamma_{kj}|,\ q=\max_{1\le k\le N,1\le j\le L}|q_{kj}|.$$

Доказательство. Приведем доказательство сходимости итерационного процесса (5.9.13). Решение $u^*(r,\Theta)$ уравнения (5.9.1) принадлежит пространству $L_2(G_1)$, и для любого $\varepsilon>0$ найдется такая константа T, что в пространстве $L_2(G_2)$:

$$\left\|\frac{1}{i}\iint\limits_{G_2/D}|U^*(p,\omega)|^2dpd\omega\right\|\le\varepsilon^2.$$

Возьмем в качестве начального приближения $u^0(r,\Theta)$ с финитным спектром, сосредоточенным в области D. Повторяя рассуждения, приведенные при доказательстве теоремы 5.9.1, убеждаемся, что $u_{kj}^{n+1}(r,\Theta)\to u_{kj}^{*}(r,\Theta)$. Следовательно, последовательность $u^{n+1}(r,\Theta)$, определяемая формулой (5.9.13), сходится к функции $u^{*T}(r,\Theta)$. Оценка погрешности итерационной схемы (5.9.13), (5.9.14) получается повторением выкладок, приведенных при доказательстве теоремы 5.9.2.

Замечание 5.9.2. *В данном разделе представлен итерационный метод восстановления входных сигналов в системах с аберрациями. Этот метод допускает распространение на системы, подвергающиеся и другим искажениям. В частности, на системы, модели которых описываются интегральными уравнениями, ядра которых являются свертками для различных функциональных преобразований.*

Заключение

Монография посвящена аналитическим и численным методам параметрической идентификации динамических систем с сосредоточенными и распределенными параметрами. Рассматриваемые в книге динамические системы моделируются интегральными уравнениями Вольтерра, обыкновенными дифференциальными уравнениями и уравнениями в частных производных. Подробно рассмотрены линейные и нелинейные математические модели (в том числе и многомерные). Большое внимание уделяется дифференциальным уравнениям (обыкновенным и в частных производных) с производными дробного порядка. Основным математическим аппаратом, используемым в книге, являются методы функционального анализа и интегральных преобразований. Отдельная часть посвящена приближенным методам восстановления входных сигналов.

Книга предназначена специалистам по информационно-измерительной технике. Она также может быть рекомендована студентам и аспирантам по прикладной математике и информатике.

Список литературы

[1] Азизов, А. М. Точность измерительных преобразователей / А. М. Азизов, А. Н. Гордов. – Л. : Энергия, 1975. – 256 с.

[2] Александровский, Н. М. Адаптивные системы автоматического управления сложными технологическими процессами / Н. М. Александровский, С. В. Егоров, Р. Е. Кузин. – М. : Энергия, 1973. – 272 с.

[3] Арсенин, В. Я. Восстановление формы сигнала, свободной от искажений, обусловленных аппаратурой и каналом передачи / В. Я. Арсенин, В. В. Иванов // Измерительная техника. – 1969. – № 1. – С. 74–79.

[4] Бакалов, В. П. О возможности решения уравнения свертки при неизвестном ядре в случае многомерных пространственно-ограниченнных сигналов / В. П. Бакалов, Н. П. Русских // Автометрия. – 1985. – № 5. – С. 92–95.

[5] Бакут, П. А. О возможности восстановления двумерного изображения из дискретизированного уравнения свертки / П. А. Бакут, Д. В. Макаров, А. Н. Ряхин, К. Н. Свиридов // Радиотехника и электроника. – 1988. – Т. 33, № 1. – С. 2422–2424.

[6] Бари, Н. К. Тригонометрические ряды / Н. К. Бари. – М. : ГИФМЛ, 1960. – 936 с.

[7] Бакушинский, А. Б. Некорректные задачи. Численные методы и приложения / А. Б. Бакушинский, А. В. Гончарский. – М. : Изд-во МГУ, 1989. – 200 с.

[8] Бахвалов, Н. С. Численные методы / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. – М. : Бином. Лаборатория знаний, 2003. – 632 с.

[9] Бахтадзе, Н. Н. Интеллектуальные алгоритмы идентификации состояния энергообъектов / Н. Н. Бахтадзе, В. А. Лотоцкий, Е. М. Максимов, Н. Е. Максимова // Информационные технологии и вычислительные системы. – 2011. – № 3. – С. 45–50.

[10] Бейтс, Р. Восстановление и реконструкция изображений / Р. Бейтс, М. Мак-Доннел. – М. : Мир, 1989. – 336 с.

[11] Бодунов, Н. А. Введение в теорию локальной параметрической идентифицируемости / Н. А. Бодунов // Дифференциальные уравнения и процессы управления, 2012. – № 2. – С. 1–137.

[12] Бойков, И. В. Оптимальные методы вычислений в задачах автоматического регулирования / И. В. Бойков. – Пенза : Изд-во Пенз. политехн. ин-та, 1983. – 96 с.

[13] Бойков, И. В. Об одном методе определения динамических характеристик при использовании реального испытательного сигнала / И. В. Бойков // Измерительная техника. – 1991. – № 1. – С. 9–10.

[14] Бойков, И. В. Аналитические методы идентификации динамических систем / И. В. Бойков. – Пенза : Изд-во Пензенского политехнического ин-та, 1992. – 112 с.

[15] Бойков, И. В. Об одном способе измерения параметров линейных объектов / И. В. Бойков // Измерительная техника. – 1992. – № 5. – С. 9–10.

[16] Бойков, И. В. Об идентификации нелинейных объектов / И. В. Бойков // Измерительная техника. – 1994. – № 9. – С. 12–14.

[17] Бойков, И. В. Об идентификации нелинейных систем с запаздыванием / И. В. Бойков // Измерительная техника. – 1995. – №4. – С. 14–15.

[18] Бойков, И. В. Приближенные методы восстановления входных сигналов, искаженных нелинейными динамическими системами / И. В. Бойков // Измерительная техника. – 1995. – № 11. – С. 3–7.

[19] Бойков, И. В. Восстановление финитных функций / И. В. Бойков // Измерительная техника. – 1997. – № 6. – С. 33–38.

[20] Бойков, И. В. Об идентификации нелинейных систем / И. В. Бойков // Метрология. – 1997. – № 2. – С. 52–60.

[21] Бойков, И. В. Приближенные методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов. Часть I. Сингулярные интегралы / И. В. Бойков. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2005. – 360 с.

[22] Бойков, И. В. Приближенные методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов. Часть II. Гиперсингулярные интегралы / И. В. Бойков. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2009. – 252 с.

[23] Бойков, И. В. Устойчивый метод восстановления входных сигналов датчиков параметров движения / И. В. Бойков, Ю. М. Гусенко, А. Н. Николаев // Динамические измерения : тезисы докладов 4-го Всесоюзного симпозиума. – Л. : НПО ВНИИМ им. Д. И. Менделеева, 1984. – С. 123–126.

[24] Бойков, И. В. Приближенные методы вычисления интегралов Адамара и решение гиперсингулярных интегральных уравнений / И. В. Бойков, Н. Ф. Добрынина, Л. Н. Домнин. – Пенза : Изд-во ПГТУ, 1996. – 188 с.

[25] Бойков, И. В. Определение динамических характеристик измерительных преобразователей с распределенными параметрами / И. В. Бойков, Н. П. Кривулин // Измерительная техника. – 2000. – № 9. – С. 20–22.

[26] Бойков, И. В. Определение временных характеристик линейных систем с распределенными параметрами / И. В. Бойков, Н. П. Кривулин // Метрология. – 2012. – № 8. – С. 3–14.

[27] Бойков, И. В. Идентификация систем, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных / И. В. Бойков, Н. П. Кривулин // Математическое и компьютерное моделирование естественнонаучных и социальных проблем : тр. VII Междунар. науч.-техн. конф. – Пенза : Приволжский дом знаний, 2012. – С. 23–27.

[28] Бойков, И. В. Восстановление параметров линейных систем, описываемых дифференциальными уравнениями с переменными коэффициентами / И. В. Бойков, Н. П. Кривулин // Измерительная техника. – 2013. – № 4. – С. 6–11.

[29] Бойков, И. В. Параметрическая идентификация систем, математические модели которых описываются дифференциальными уравнениями с производными дробных порядков / И. В. Бойков, Н. П. Кривулин // Метрология. – 2013. – № 9. – С. 3–17.

[30] Бойков, И. В. Параметрическая идентификация эредитарных систем с распределенными параметрами / И. В. Бойков, Н. П. Кривулин // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки. – 2013. – № 2 (26). – С. 120–129.

[31] Бойков, И. В. Идентификация дискретных динамических систем с распределенными параметрами / И. В. Бойков, Н. П. Кривулин // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2014. – № 2 (30). – С. 34–49.

[32] Бойков, И. В. Параметрическая идентификация линейных динамических систем с рапределенными параметрами / И. В. Бойков, Н. П. Кривулин // Метрология. – 2014. – № 7. – С. 13–24.

[33] Бойков, И. В. Методы идентификации параметров в динамических системах управления технологическими процессами / И. В. Бойков, Н. П. Кривулин // Наука и образование транспорту : материалы VII Междунар. науч.-практ. конф. – Самара : СамГУПС, 2014. – С. 183–186.

[34] Бойков, И.В. Применение преобразования Хартли для определения импульсной переходной функции динамических систем / И. В. Бойков, Н. П. Кривулин, И. М. Мойко, Н. В. Мойко // Новости передовой науки – 2013 : VIII Междунар. науч.-практ. конф. – Бял ГРАД-БГ (г. София, Болгария), 2013. – С. 73–76.

[35] Бойков, И. В. Идентификация динамических систем методом интегральных преобразований по двум тестовым сигналам / И. В. Бойков, Н. П. Кривулин, И. М. Мойко, Н. В. Мойко // Математическое и компьютерное моделирование естественнонаучных и социальных проблем : VII Междунар. науч.-техн. конф. молодых специалистов, аспирантов и студентов. – Пенза, 2013. – С. 180–183.

[36] Бойков, И. В. Методы идентификации динамических систем / И. В. Бойков, Н. П. Кривулин // Программные системы: теория и приложения. – 2014. – Т. 5, № 5 (23). – С. 79–96. URL: http://psta.psiras.ru/read/psta2014_5_79-96.pdf

[37] Бойков, И. В. Методы идентификации динамических систем / И. В. Бойков, Н. П. Кривулин // Обобщенные постановки и решения задач управления : сб. тр. VII Междунар. симпозиума (GSSCP-2014) (26–30 сентября 2014 г., г. Геленджик – с. Дивноморское, Краснодарский край, Россия). – Геленджик, 2014. – С. 46–55.

[38] Бойков, И. В. Численные методы восстановления измеряемых сигналов датчиков линейных скоростей движения в системах диагностики механизмов / И. В. Бойков, А. Н. Николаев, Т. В. Черушева // Проблемы машиностроения и автоматизации. – М. : Будапешт, 1989. – Т. 26. – С. 28–33.

[39] Бойков, И. В. Приближенные методы идентификации динамических систем / И. В. Бойков, Т. В. Черушева // Измерительная техника. – 1992. – № 7. – С. 8–9.

[40] Бойков, И. В. Итерационные методы восстановления входных сигналов / И. В. Бойков, Т. В. Черушева // Оптимальные методы вычислений и их применение. – Вып. 9. – Пенза : Пенз. политехн. ин-т, 1990. – С. 18–30.

[41] Бойков, И. В. Итерационные методы восстановления пространственных изображений, искаженных системами с аберрациями / И. В. Бойков, Т. В. Черушева // Оптика и спектроскопия. – 1993. – Т. 74, № 2.– С. 412–421.

[42] Бойков, И. В. Об одном методе определения динамических характеристик линейных систем / И. В. Бойков, Т. В. Черушева // Измерительная техника. – 1995. – № 5. – С. 13–16.

[43] Брейсуэл, Р. Преобразование Хартли / Р. Брейсуэл. – М. : Мир, 1990. – 175 с.

[44] Брикман, М. С. Аналитическая идентификация управляемых систем / М. С. Брикман, Д. С. Кристинков. – Рига : Зинатне, 1974. – 204 с.

[45] Бунич, А. П. Синтез и применение дискретных систем управления с идентификатором / А. П. Бунич, Н. Н. Бахтадзе. – М. : Наука, 2003. – 232 с.

[46] Бутковский, А. Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами / А. Г. Бутковский. – М. : Наука, 1965. – 474 с.

[47] Бутковский, А. Г. Характеристики систем с распределенными параметрами : справочное пособ. / А. Г. Бутковский. – М. : Наука, 1979. – 224 с.

[48] Ван-Трис, Г. Л. Синтез оптимальных нелинейных систем управления / Г. Л. Ван-Трис. – М. : Мир, 1964. – 168 с.

[49] Василенко, Г. И. Теория восстановления сигналов / Г. И. Василенко. – М. : Сов. радио, 1979. – 272 с.

[50] Василенко, Г. И. Восстановление изображений / Г. И. Василенко, А. М. Тараторин. – М. : Радио и связь, 1986. – 304 с.

[51] Ватульян, А. О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела / А. О. Ватульян. – М. : Физматлит, 2007. – 223 с.

[52] Верлань, А. Ф. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы / А. Ф. Верлань, В. С. Сизиков. – Киев : Наукова думка, 1986. – 543 с.

[53] Виглин, С. И. Переходные процессы в системах с переменными параметрами / С. И. Виглин. – М. : Сов. радио, 1971. – 184 с.

[54] Владимиров, В. С. Уравнения математической физики / В. С. Владимиров. – М. : Наука, 1981. – 512 с.

[55] Волков, В. А. Способ нахождения оценки импульсной переходной характеристики на основе системы линейных уравнений / В. А. Волков, И. В. Бойков, В. В. Рыжаков, В. В. Богонин // Автоматизация процессов обработки первичной информации. – Пенза : Пенз. политехн. ин-т, 1991. – С. 61–65.

[56] Габбасов, Р. Качественная теория оптимальных процессов / Р. Габбасов, Ф. М. Кириллова. – М. : Наука, 1971. – 508 с.

[57] Гантмахер, Ф. Р. Теория матриц Ф. Р. Гантмахер. – М. : Наука, 1967, – 576 с.

[58] Гахов, Ф. Д. Краевые задачи / Ф. Д. Гахов. – М. : ГИФМЛ, 1963. – 639 с.

[59] Гахов, Ф. Д. Уравнения типа свертки / Ф. Д. Гахов, Ю. И. Черский. – М. : Наука, 1978. – 296 с.

[60] Гельфанд И. М. Обобщенные функции и действия над ними / И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов. – М. : Добросвет, 2000. – 412 с.

[61] Гельфонд, А. О. Исчисление конечных разностей / А. О. Гельфонд. – М. : ГИФМЛ, 1959. – 400 с.

[62] Гинсберг, К. С. Системные закономерности и теории идентификации I / К. С. Гинсберг // Автоматика и телемеханика. – 2002. – № 5. – С. 156–170.

[63] Гончаров, В. Л. Теория интерполирования и приближения функций / В. Л. Гончаров. – М. ; Л. : ГИТТЛ, 1934. – 327 с.

[64] Горнов, А. Ю. Численные методы для решения терминальных задач оптимального управления / А. Ю. Горнов, А. И. Тятюшкин, Е. А. Финкельштейн // ЖВМ и МФ. – 2016. – Т. 56, № 2. – С. 224–237.

[65] Гохберг, И. Ц. Уравнения в свертках и проекционные методы их решения / И. Ц. Гохберг, И. А. Фельдман. – М. : Наука, 1971. – 352 с.

[66] Грачев, Н. Н. Об идентификации линейной системы по двум тестовым испытаниям / Н. Н. Грачев, М. А. Красносельский, Н. А. Кузнецов // ДАН СССР. – 1990. – Т. 310, № 4. – С. 807–809.

[67] Давыдов, А. А. Структурная устойчивость управляемых систем на ориентируемых поверхностях / А. А. Давыдов // Матем. Сб. – 1991. – Т. 182, Вып. 1. – С. 3-35

[68] Грановский, В. А. Динамические измерения / В. А. Грановский. – Л. : Энергоатомиздат, 1984. – 220 с.

[69] Гроп, Д. Методы идентификации систем / Д. Гроп. – М. : Мир, 1979. – 304 с.

[70] Девятов, Б. Н. Теория переходных процессов в технологических аппаратах с точки зрения задач управления / Б. Н. Девятов. – Новосибирск : РИО СО АН СССР, 1964. – 324 с.

[71] Дейч, А. М. Методы идентификации динамических объектов / А. М. Дейч. – М. : Энергия, 1979. – 240 с.

[72] Демидович, Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу / Б. П. Демидович.– М. : ГИФМЛ, 1962. – 544 с.

[73] Деч, Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и $L-$ преобразования / Г. Деч. – М. : Наука, 1971. – 288 с.

[74] Жиров, М. В. Идентификация и адаптивное управление технологическими процессами с нестационарными параметрами / М. В. Жиров, В. В. Макаров, В. В. Солдатов. – М. : Изд–во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2011. – 204 с.

[75] Зарипов, М. Н. Идентификация нелинейных объектов по базе предикатных описаний с использованием функций / М. Н. Зарипов, В. Н. Салыге // Автомеханика и телемеханика. – 1997. – № 5. – С. 53–63.

[76] Задирака, В. К. Теория вычисления преобразования Фурье / В. К. Задирака. – Киев : Наук. думка, 1983. – 214 с.

[77] Знаменский С. В. Моделирование задачи оптимального выравнивания последовательностей / С. В. Знаменский // Программные системы: теория и приложения. – 2014. – Т. 5, № 4 (22). – С. 257–267. URL: http://psta.psiras.ru/read/psta2014_4_257-267.pdf

[78] Иванов, А. И. Синтез нелинейных динамических моделей Винера – Гаммерштейна перераспределением памяти между входом и выходом / А. И. Иванов // Автомеханика и телемеханика. – 1997. – № 11. – С. 21–32.

[79] Иванов, В. В. Теория приближенных методов и ее применение к численному решению сингулярных интегральных уравнений / В. В. Иванов. – Киев : Наук. думка, 1968. – 287 с.

[80] Иванов, В. К. Теория линейных некорректных задач и ее приложения / В. К. Иванов, В. В. Васин, В. П. Танана. – М. : Наука, 1978. – 270 с.

[81] Какичев, В. А. Методы решения некорректных задач для аналитических функций двух комплексных переменных / В. А. Какичев. – Тюмень : Изд-во ТГУ, 1978. – 124 с.

[82] Каминскас, В. А. Идентификация динамических систем по дискретным наблюдениям / В. А. Каминскас. – Вильнюс : Москалас, 1982. – Ч. 1. – 245 с.

[83] Канторович, Л. В. Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. – М. : Наука, 1984. – 752 с.

[84] Клейман, Е. Г. Идентификация нестационарных объектов / Е. Г. Клейман // Автоматика и телемеханика. – 1999. – № 10. – С. 3–45.

[85] Клейман, Е. Г. Идентификация входных сигналов в динамических системах / Е. Г. Клейман // Автоматика и телемеханика. – 1999. – № 12. – С. 3–15.

[86] Клейман, Е. Г. Идентификация нестационарных объектов / Е. Г. Клейман, И. А. Мочалов // Автоматика и телемеханика. – 1994. – № 2. – С. 3–22.

[87] Константинов, Л. И. Параметрическая идентификация нелинейных дифференциальных уравнений на основе сплайн-схем, точных на многочленах / Л. И. Константинов, В. А. Кочетуров, В. М. Шумилов // Автоматика и телемеханика. – 1997. – № 5. – С. 53–63.

[88] Корнейчук, Н. П. Точные константы в теории приближения / Н. П. Корнейчук. – М. : Наука, 1987. – 424 с.

[89] Красносельский, М. А. Об итерационных процедурах в линейных задачах : препринт / М. А. Красносельский, И. В. Емелин, В. С. Козякин ; Институт проблем управления. – М., 1979. – 64 с.

[90] Кривулин, Н. П. Методы идентификации динамических характеристик систем с распределенными параметрами : дис. ... канд. техн. / Кривулин Н. П. . – Пенза, 2000. – 182 с.

[91] Кривулин, Н. П. Моделирование распределения светового потока в оптической системе волоконно-оптического сигнализатора уровня жидкости : моногр. / Н. П. Кривулин, Д. И. Серебряков. – Пенза : Инф.-изд. центр ПГУ, 2007. – 76 с.

[92] Кривулин, Н. П. Разработка теории распределения светового потока в оптической системе волоконно-оптических преобразователей физических величин отражательного типа : моногр. / Н. П. Кривулин, Е. А. Бадеева, Л. Н. Коломиец, Т. И. Мурашкина, А. Г. Пивкин. – Пенза : Инф.-изд. центр ПГУ, 2008. – 96 с.

[93] Кривулин, Н. П. Расчет конструктивных параметров чувствительного элемента волоконно-оптического сигнализатора уровня жидкости / Н. П. Кривулин, Д. И. Серебряков, Т. И. Мурашкина // Авиакосмическое приборостроение. – 2006. – № 7. – С. 20–22.

[94] Кривулин, Н. П. Математическая модель распространения светового потока в световоде / Н. П. Кривулин, Д. И. Серебряков // Авиакосмическое приборостроение. – 2006. – № 8. – С. 7–9.

[95] Кривулин, Н. П. Распределение светового потока в ВОП с отражающим управляющим элементом / Н. П. Кривулин, Л. Н. Коломиец, Т. Ю. Крупкина, Т. И. Мурашкина // Датчики и системы. – 2007. – № 6. – С. 14–16.

[96] Кривулин, Н. П. Имитационное моделирование эксперимента распределения светового потока в оптической системе, включающей границу раздела сред с разными коэффициентами преломления / Н. П. Кривулин, Д. И. Серебряков // Датчики и системы. – 2007. – № 11. – С. 45–47.

[97] Кривулин, Н. П. ВОП перемещения со сферической линзой / Н. П. Кривулин, В. Д. Зуев, Т. И. Мурашкина // Датчики и системы. – 2008. – № 5. – С. 8–10.

[98] Кривулин, Н. П. Установка для проверки волоконно-оптического датчика давления отражательного типа / Н. П. Кривулин, Т. Ю. Крупкина, Т. И. Мурашкина // Измерительная техника. – 2008. – № 5. – С. 14–16.

[99] Кривулин, Н. П. Моделирование модуляции светового потока в оптической системе волоконно-оптического преобразователя / Н. П. Кривулин // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки. – 2008. – № 3. – С. 15–18.

[100] Кривулин, Н. П. Математическая модель волоконно-оптического преобразователя перемещения с управляющим элементом в виде сферической линзы / Н. П. Кривулин, Ю. М. Голубинский, В. Д. Зуев // Авиакосмическое приборостроение. – 2008. – № 5. – С. 45–48.

[101] Кривулин, Н. П. Методика определения конструктивных параметров волоконно-оптического преобразователя с управляющим элементом в виде шаровой линзы / Н. П. Кривулин, В. С. Волков, В. Д. Зуев, Т. И. Мурашкина // Авиакосмическое приборостроение. – 2008. – № 10. – С. 27–29.

[102] Кривулин, Н. П. Математическая формализация критериев оптимальности основных метрологических характеристик ВОП с открытым оптическим каналом / Н. П. Кривулин // Метрология. – 2008. – № 12. – С. 34–43.

[103] Кривулин, Н. П. Математическая модель волоконно-оптического датчика перемещения со сферической линзы / Ю. М. Голубинский, В. Д. Зуев, Н. П. Кривулин // Датчики и системы. – 2009. – № 3. – С. 15–18.

[104] Кривулин, Н. П. Моделирование распределения интенсивности светового потока в пространстве волоконно-оптического преобразователя перемещений с управляющим элементом в виде сферической линзы / Н. П. Кривулин, В. С. Волков, А. С. Щевелев // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. – 2009. – № 12. – С. 16–18.

[105] Кривулин, Н. П. Математическая модель волоконно-оптического преобразователя перемещения с управляющим элементом в виде сферической линзы / Н. П. Кривулин, О. С. Граевский, В. С. Волков // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. – 2009. – № 12. – С. 19–22.

[106] Кривулин, Н. П. Конструктивно-технологические решения чувствительных элементов датчиков абсолютного давления / Н. П. Кривулин, И. Н. Баринов, В. С. Волков // Приборостроение и средства автоматизации. – 2008. – № 5. – С. 15–18.

[107] Кривулин, Н. П. Микрооптический преобразователь давления / Н. П. Кривулин, И. Н. Баринов, В. Д. Зуев // Приборостроение и средства автоматизации. – 2008. – № 6. – С. 16–17.

[108] Кривулин, Н. П. Определение параметров физических процессов, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных с переменными коэффициентами / Н. П. Кривулин // Математическое и компьютерное моделирование естественнонаучных и социальных проблем : сб. ст. VIII Междунар. науч.-техн. конф., 26-30 мая 2014 г. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2014. – С. 172–178.

[109] Пат. № 2147750 Российская Федерация. Способ измерения параметров векторов ускорений / Кривулин Н. П., Мещеряков В. А., Капезин С. В., Мурашкина Т. И., Баранов С. С. – Зарег. в гос. реестре РФ 20.04.2000.

[110] Пат. № 2338155 Российская Федерация. Волоконно-оптический преобразователь перемещения / Кривулин Н. П., Мурашкина Т. И., Зуев В. Д. – Зарег. в гос. реестре РФ 10.11.2008.

[111] Кротов, В. Ф. Методы и задачи оптимального управления / В. Ф. Кротов, В. И. Гурман. – М. : Наука, 1973. – 448 с.

[112] Крылов, В. И. Приближенное вычисление интегралов / В. И. Крылов. – М. : Наука, 1967. – 500 с.

[113] Курзнер, А. Б. Восстановление входных сигналов средств измерений, описываемых линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициетами / А. Б. Курзнер // Измерительная техника. – 1990. – № 2. – С. 12–13.

[114] Курош, А. Г. Курс высшей алгебры / А. Г. Курош. – М. : Наука, 1968. – 372 с.

[115] Лаврентьев, М. М. Некорректные задачи математической физики и анализа / М. М. Лаврентьев, В. Г. Романов, С. П. Шишатский. – М. : Наука, 1980. – 288 с.

[116] Ланцош, К. Практические методы прикладного анализа / К. Ланцош. – М. : Физматгиз, 1961. – 524 с.

[117] Льюнг, Л. Идентификация систем. Теория для пользователя / Л. Льюнг. – М. : Наука, 1991. – 432 с.

[118] Люстерник, Л. А. Элементы функционального анализа / Л. А. Люстерник, В. И. Соболев. – М. : Наука, 1965. – 520 с.

[119] Мартыненко, В. С. Операционное исчисление : учеб пособие / В. С. Мартыненко. – К. : Выща шк., 1990. – 359 с.

[120] Методы классической и современной теории автоматического управления : учеб. пособие. Т. 1–5 / под ред. К. А. Пупкова, Н. Д. Егупова. – М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2004. – Т. 1. – 656 с. ; Т. 2. – 640 с. ; Т. 3. – 616 с. ; Т. 4. – 744 с. ; Т. 5. – 784 с.

[121] Мокров, Е. А. Статико-динамические акселерометры для ракетно-космической техники / Е. А. Мокров, А. А. Папко. – Пенза. : ПАИИ, 2004. – 164 с.

[122] Мусхелишвили, Н. И. Сингулярные интегральные уравнения / Н. И. Мусхелишвили. – М. : Наука, 1968. – 612 с.

[123] Натансон, И. П. Конструктивная теория функций / И. П. Натансон. – М. ; Л. : ГИТТЛ, 1949. – 808 с.

[124] Нахушев, А. М. Дробное исчисление и его применение / А. М. Нахушев. – М. : Физматлит, 2003. – 272 с.

[125] Немуры, Н. Идентификация динамических систем / Н. Немуры. – Вильнюс : Минтис, 1974. – 284 с.

[126] Никольский, С. М. Квадратурные формулы / С. М. Никольский. – М. : Наука, 1979. – 254 с.

[127] Норкин, К. Б. Приложение теории среднеквадратичных приближений к линейным самонастраивающим моделям / К. Б. Норкин // Автоматика и телемеханика. – 1966. – № 7. – С. 49–54.

[128] Обломская, Л. Я. О методах последовательных приближений для линейных уравнений в банаховых пространствах / Л. Я. Обломская // ЖВМ и МФ. – 1968. – Т. 8, № 2. – С. 417–426.

[129] Оппенгейм, А. В. Цифровая обработка сигналов : пер. с англ. / А. В. Оппенгейм, Р. В. Шафер ; под ред. С. Я. Шаца. – М. : Связь, 1979. – 416 с.

[130] Пантелеев, А. В. Теория управления в примерах и задачах / А. В. Пантелеев, А. С. Бортаковский. – М. : Высшая школа, 2003. – 583 с.

[131] Полянин, А.Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики / А. Д. Полянин. - М. : Ф-Т, 2001. – 576 с.

[132] Попов, Е. П. Адаптивные системы управления без пробных входных сигналов / П. Е. Попов, Г. М. Лоскутов, Р. М. Юсупов // Дискретные и самонастраивающиеся системы : тр. конгресса ИФАК. – М. : Изд-во АН СССР, 1966. – С. 331–336.

[133] Постников, М. М. Теория Галуа / М. М. Постников. – М. : ГИФМЛ. 1963. –220 с.

[134] Поулис, М. П. Идентификация систем с распределенными параметрами. Общий обзор / М. П. Поулис, Р. Е. Гудсон // ТИИЭР. – 1976. – Т. 64, № 1. – С. 56–80.

[135] Прангишвили, И. В. Идентификация систем и задачи управления: на пути к современным системным методологиям / И. В. Прангишвили, В. А. Лотоцкий, К. С. Гинсберг, В. В. Смолянинов // Проблемы управления. – 2004. – № 4. – С. 2–15.

[136] Пресдорф, З. Некоторые классы сингулярных уравнений / З. Пресдорф. – М. : Мир, 1979. – 494 с.

[137] Проскуряков, И. В., Сборник задач по линейной алгебре / И. В. Проскуряков. – М. : Наука, 1984. – 384 с.

[138] Пупков, К. А. Теоретические основы кибернетики (Функциональные ряды в теории нелинейных систем) / К. А. Пупков, В. И. Капалин, А. С. Ющенко. – М. : Наука, 1976. – 448 с.

[139] Пытьев, Ю. П. Прибор + ЭВМ = новые возможности / Ю. П. Пытьев, А. И. Чуличков. – М. : Знание, 1983. – 90 с.

[140] Райбман, Н. С. Идентификация объектов управления / Н. С. Райбман // Автоматика и телемеханика. – 1979. – № 6. – С. 80–93.

[141] Райбман, Н. С. Построение моделей процессов производства / Н. С. Райбман, В. М. Чадеев. – М. : Энергия, 1975. – 374 с.

[142] Рапопорт, Э. Я. Анализ и синтез систем автоматического управления с распределенными параметрами / Э. Я. Рапопорт. – М. : Высш. шк., 2005. – 292 с.

[143] Рутман, Р. С. Самонастраивающие системы с настройкой по динамическим характеристикам (обзор) / Р. С. Рутман // Автоматика и телемеханика. – 1962. – Т. 23, № 5. – С. 661–684.

[144] Роббинс, Г. Принципы обратной фильтрации для линейных пространственно зависимых систем отображения / Г. Роббинс, Т. Хуанг // Обработка изображений при помощи цифровых вычислительных машин. – М., 1973. – С. 163–174.

[145] Савчук, А. Пространственно зависимые искажения изображения, вызванные движением, и реставрация изображений / А. Савчук // Обработка изображений при помощи цифровых вычислительных машин. – М., 1973. – С. 153–162.

[146] Самко, С. Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Марычев. – Минск : Наука и техника, 1987. – 688 с.

[147] Сахнович, Л. А. Уравнения с разностным ядром на конечном отрезке / Л. А. Сахнович // УМН. – 1980. – Т. 35, № 4. – С. 69–129.

[148] Северцев, Н. А. Основные вопросы теории эксплуатации сложных систем / Н. А. Северцев, В. К. Дедков. – М. : Высшая школа, 1976. – 432 с.

[149] Сеге, Г. Ортогональные многочлены / Г. Сеге. – М. : Физматгиз, 1962. – 500 с.

[150] Сейдж, Э. П. Идентификация систем управления / Э. П. Сейдж, Д. Л. Мелса. – М. : Наука, 1974. – 284 с.

[151] Сиберт, У. М. Цепи, сигналы, системы / У. М. Сиберт. – М. : Мир, 1988. – Т. 1. – 336 с. ; Т. 2. – 360 с.

[152] Сидоров, Д. Н. Моделирование нелинейных нестационарных динамических систем рядами Вольтерра: идентификация и приложения / Д. Н. Сидоров // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2000. – Т. 3, № 1. – С. 182–194.

[153] Сизиков, В. С. Математические методы обработки результатов измерений / В. С. Сизиков. – СПб. : Политехника, 2001. – 240 с.

[154] Сизиков, В. С. Инфрокрасная томография горячего газа: математическая модель активно-пассивной диагностики / В. С. Сизиков // Научно-технический вестник информационных технологий механики и оптики. – 2013. – № 6 (88). – С. 1–17.

[155] Сизиков, В. С. Реконструкция смазанных и дефокусированных изображений методом регуляризации / В. С. Сизиков, И. А. Белов // Оптический журнал. – 2000. – Т. 67, № 4. – С. 60–63.

[156] Симоненко, И. Б. О некоторых интегро-дифференциальных уравнениях типа свертки / И. Б. Симоненко // Известия вузов. Математика. – 1959. – № 2. – С. 213–226.

[157] Смирнов, В. И. Курс высшей математики / В. И. Смирнов. – СПб. : БХВ-Петербург, 2008. – Т. I. – 616 с.

[158] Солонина, А. И. Основы цифровой обработки сигналов : курс лекций / А. И. Солонина, Д. А. Улахович, С. М. Арбузов, Е. Б. Соловьева. – СПб. : БХВ-Петербург, 2005. – 768 с.

[159] Сохоцкий, Ю. В. Об определенных интегралах и функциях, употребляемых при разложениях в ряды / Ю. В. Сохоцкий. – СПб., 1873.

[160] Справочник по теории автоматического управления / под ред. А. А. Красовского. – М. : Наука, 1987. – 712 с.

[161] Современные методы идентификации систем / под ред. П. Эйкхоффа. – М. : Мир, 1983. – 400 с.

[162] Солопченко, Г. И. Обратные задачи в измерительных процедурах / Г. И. Солопченко // Измерения, контроль, автоматизация. – 1983. – № 2. – С. 32–46.

[163] Сондхи, М. М. Реставрация изображений: устранение пространственно инвариантных искажений / М. М. Сондхи // ТИИЭР – 1972. – Т. 60, № 7. – С. 108–112.

[164] Старостенко, В. И. Устойчивые численные методы в задачах гравиметрии / В. И. Старостенко. – Киев : Наукова думка, 1978. – 226 с.

[165] Страхов, В. Н. О решении линейных обратных задач гравиразведки / В. Н. Страхов, Т. А. Гванцеладзе // Сообщ. АН ГССР, 1989. – Т. 33, № 2. – С. 289–292.

[166] Теребиж, В. Ю. Восстановление изображений при минимальной априорной информации / В. Ю. Теребиж // Успехи физических наук. – 1995. – Т. 165, № 2. – С. 143–176.

[167] Техническая кибернетика. Теория автоматического регулирования / Под ред. В. В. Солодовникова. – М. : Машиностроение, 1967. – Кн. 1. – 768 с.

[168] Техническая кибернетика. Теория автоматического регулирования / Под ред. В. В. Солодовникова. – М. : Машиностроение, 1967. – Кн. 2. – 679 с.

[169] Титчмарш, Е. Введение в теорию интегралов Фурье / Е. Титчмарш. – М. ; Л. : Гостехиздат, 1948. – 480 с.

[170] Тихонов, А. Н. Методы решения некорректных задач / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин. – Изд-е 2. – М. : Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1979. – 386 с.

[171] Трикоми, Ф. Интегральные уравнения / Ф. Трикоми. – М. : ИИЛ, 1960. – 300 с.

[172] Учайкин, В. В. Метод дробных производных / В. В. Учайкин. – Ульяновск : Артишок, 2008. – 512 с.

[173] Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления / Г. М. Фихтенгольц. – М. : Ф-Т, 2001. – Т. 1. – 616 с.

[174] Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления / Г. М. Фихтенгольц. – М. : Ф-Т, 2001. – Т. 2. – 810 с.

[175] Форсайт, Дж. Машинные методы математических вычислений / Дж. Форсайт, М. Малькольм, К. Моулер. – М. : Мир, 1980. – 280 с.

[176] Фридман, В. М. Метод последовательных приближений для итерационного уравнения Фредгольма 1-го рода / В. М. Фридман // Успехи матем. наук. – 1956. – Т. XI, № 1 (67). – С. 233–234.

[177] Хургин, Я. И. Финитные функции в физике и технике / Я. И. Хургин, В. П. Яковлев. – М. : Наука, 1971. – 408 с.

[178] Хэррис, Ф. Д. Использование окон при гармоническом анализе методом дискретного преобразования Фурье / Ф. Д. Хэррис // ТИИЭР. – 1978. – Т. 68, № 1. – С. 80–96.

[179] Цыпкин, Я. З. Информационная теория идентификации / Я. З. Цыпкин. – М. : Наука, 1995. – 336 с.

[180] Цыпкин, Я. З. Основы теории автоматических систем / Я. З. Цыпкин. – М. : Наука, 1977. – 560 с.

[181] Шафер, Р. У. Итерационные алгоритмы восстановления сигналов при наличии ограничений / Р. У. Шафер, Р. М. Мерсеро, М. А. Ричардс // ТИИЭР. – 1981. – Т. 69, № 4. – С. 34–55.

[182] Шварц, Л. Математические методы для физических наук / Л. Шварц. – М. : Мир, 1965. – 412 с.

[183] Щербаков, М. А. Алгоритм вычисления ядер Винера нелинейных систем в частотной области / М. А. Щербаков // Кибернетика и вычислительная техника. – Киев : Наукова думка, 1988. – С. 51–58.

[184] Эйкхофф, П. Основы идентификации систем управления / П. Эйкхофф. – М. : Мир, 1975. – 686 с.

[185] Эфрос, А. М. Операционное исчисление и контурные интегралы / А. М. Эфрос, А. М. Данилевский. – Харьков : Государственное научно-техническое издательство Украины, 1937. – 384 с.

[186] Ягодкина, Т. В. Структурная и параметрическая идентификация многомерных динамических систем / Т. В. Ягодкина // Идентификация систем и задачи управления : тр. III Междунар. конф. SICPRO'04 (Москва, 28–30 января 2004 г.). – М. : Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, 2004. – С. 1990–2020.

[187] Anderson, T. W. On asymptotic distributions or estimated parameters of stochastic diference equations / T. W. Anderson // Ann. Math. Stat. – 1959. – Vol. 30. – P. 676–687.

[188] Apartsyn, A. S. To identification of integral models of nonlinear dynamic systems / A. S. Apartsyn, D. N. Sidorov, S. V. Solodusha // Identification of Dynamical Systems and Inverse Problems Proceedings of III International Conference (Moscow-St.Petersburg). – Moscow ; St.Petersburg, 1998. – P. 167–175.

[189] Bellman, R. On structural identifiability / R. Bellman, K. J. Astrom // Mathematical Biosciences. – 1970. – № 7. – P. 329–339.

[190] Bodunov, N. A. Problem of local identifiability from discrete observations / N. A. Bodunov // Dfferential Equations and Applications : The second int. conf. (June. 1998). – S.-Petersburg, 1998. – P. 12–13.

[191] Boguslavsky, I. A. Algorithm for Identification of Aicraft's Dynamics / I. A. Boguslavsky // Recent Advanced in Aicraft Technology / ed. K. Agarwal. – 2012. – P. 119–140.

[192] Cobelli, C. Comments on the relationships between structural identifiability and the controllability, observabillity properties / C. Cobelli, A. Lepschy, G. Romanin-Jacur // IEEE Trans. on Automat. Contr. – 1978. – Vol. AC-23, № 5. – P. 965–966.

[193] Cobelli, C. Controllability, observability and structural identifiability of multiinput and multioutput biological compartmental systems / C. Cobelli, G. Romanin-Jacur // IEEE Trans. Biomed, Eng. – 1976. – Vol. BME-23, № 3. – P. 93–100.

[194] Courdesses, M. On identifiability of parameters in a class of parabolic distributed systems / M. Courdesses, M. P. Polis, M. Amouroux // IEEE Trans. on Automat. Contr. – 1981. – Vol. AC-26, № 2. – P. 474–477.

[195] Diouf, C. On the use of equality constraints in the identification of Volterra – Laguerre models / C. Diouf, M. Telescu, P. Cloastre, N. Tanguy // IEEE Signal Processing Letters. – 2012. – Vol. 12, № 19. – P. 857–860.

[196] Distefano, J. On the relationships between structural identifiability and the controllability, observability properties / J. Distefano // IEEE Trans. on Automat. Contr. – 1977 – Vol. 22, № 4. – P. 652.

[197] Distefano, J. J. On parameter and structural identifiability: nonunique observability/reconstructibility for identifiable systems, other ambiguities, and new denitions / J. J. Distefano, C. Cobelli // IEEE Trans. on Automat. Contr. – 1980. – Vol. AC-25, № 4. – P. 830–833.

[198] Doyle, F. J. Identification and control using Volterra models / F. J. Doyle, R. K. Pearson, B. A. Ogunnaike. – Germany : Springer Publ., 2002. – 314 p.

[199] Durbin, J. Ecient estimators of parameters in moving average models / J. Durbin // Biometrica. – 1959. – Vol. 46. – P. 306–316.

[200] Glover, K. Characterization of structural controllability / K. Glover, L. M. Silverman // IEEE Trans. on Automat. Contr. – 1976. – Vol. AC-27, № 8. – P. 534–537.

[201] Glover, K. Parametrizations of linear dynamical systems: canonical forms and identifiability / K. Glover, J. C. Willems // IEEE Trans. on Automatic Control. – 1974. – Vol. AC-12919, № 6. – P. 640–646.

[202] Gorinevsky, D. Performance-optimised applied identification of separable distributed-parameter processes / D. Gorinevsky, M. Heaven // IEEE. Trans. on Automat. Contr. – 2001. – Vol. 46, № 10. – P. 1584–1589.

[203] Goodwin, G. C. Dynamic System Identification: Experiment Design and Data Analysis / G. C. Goodwin, R. L. Payne. – New York : Academic Press, 1977.

[204] Grewal, M. S. Identifiability of linear and nonlinear dynamical systems / M. S. Grewal, K. Glover // IEEE Trans. on Automatic Control. – 1976. – Vol. 21, № 6. – P. 833–837.

[205] Favier, G. Nonlinear system modeling and identification using Volterra – PARAFAC models / G. Favier, A. Y. Kibangou, T. Bouilloc // Int. J. Adapt. Control Signal Process. – 2012. – № 26. – P. 30–53.

[206] Jacquez, J. Further comments on the relationships between structural identifiability and the controllability, observability properties / J. Jacquez // IEEE Trans. on Automat. Contr. – 1978. – Vol. 23, № 5. – P. 966–967.

[207] Jategaonkar R. Flying Vehicle System Identification: A Time Domain Methodology / R. Jategaonkar. – American Institute of Aeronautis and Astronautics. Reston, 2006.

[208] Khawar, J. Volterra kernel identification of MIMO aeroelastic system through multiresolution and multiwavelets / J. Khawar, W. Zhigang, Y. Chao // Computational Mechanics. – 2012. – Vol. 49, № 4. – P. 431–458.

[209] Klein, V. Aicraft System Identification: Theory and Methods / V. Klein, A. G. Morelli // American Institute of Aeronautics and Astronautics. Reston, 2006.

[210] Lecourtier, Y. Comments on parameter and structural identifiability: Nonunique observability/reconstructibility for identifiable systems, other ambiguities, and new definitions / Y. Lecourtier, E. Walter // IEEE Trans. on Automat. Contr. – 1981. – Vol. AC-26, № 3. – P. 800–801.

[211] MathCaD 6.0 PLUS. Финансы, инженерные и научные расчеты в среде Windows 95. – Изд-е 2-е стереотипное. – М. : Филинъ, 1997. – 712 с.

[212] Narendra, K. S. An iterative method for identification of nonlinear systems using a Hammerstein model / K. S. Narendra, P. G. Gallman // IEEE Trans. Automatic Control. – 1966. – Vol. AC-11. – P. 546.

[213] Orlov, Y. On identifiability of linear time-delay systems / Y. Orlov, L. Belkoura, J. P. Richard, M. Dambrine // IEEE Trans. on Automat. Contr. – 2002. – Vol. 47, № 8. – P. 1319–1324.

[214] Orlov, Y. Adaptive distributed parameter systems identification with enforceable identifiability conditions and reduced-order spatial dierentiation / Y. Orlov, J. Bentsman // IEEE Trans on Automat. Contr. – 2000. – Vol. 45, № 2. – P. 203–216.

[215] Parker, R. S. The identification of nonlinear models for process control using tailored plant-friendly input sequences / R. S. Parker, D. Heemstra, F. J. Doyle [et al.] // J. Proc. Control. – 2001. – № 11. – P. 237–250.

[216] Parrilo P. A. A parametric extension of mixed time/frequency robust identification / P. A. Parrilo, R. S. Sanchez Pena, M. Sznaier // IEEE Trans. on Automat. Contr. – 1999. – Vol. 44, № 2. – P. 364–369.

[217] Pearson, R. K. Identification of structurally constrained second – order Volterra models / R. K. Pearson, B. A. Ogunnaike, F. J. Doyle // IEEE Trans. on Signal Processing. – 1996. – Vol. 44, № 11. – P. 2837–2846.

[218] Plemelj, I. Ein Ergänzungsstz... / I. Plemelj // Monatschefte / für Math. U. Phys. – 1908. – Vol. XIX. – P. 205–210.

[219] Plemelj, I. Riemannsche Funktionenscharen / I. Plemelj. – Ibid, S. 211–245.

[220] Reid, J. G. Structural identiability in linear time-invariant systems / J. G. Reid // IEEE Trans. on Automatic Control. – 1977. – № 4. – P. 242–246.

[221] Rothenberg, T. J. Identication in parametric models / T. J. Rothenberg // Econometrics. – 1971, May. – Vol 39. – P. 577–591.

[222] Shcherbakov, M. A. Fast estimation of Wiener kernels of nonlinear systems in the frequency domain / M. A. Shcherbakov // Proc. of the IEEE Signal Processing. Workshop on High-Order Statistics (Alberta, Canada, July, 1997). – Alberta, 1997. – P. 203–206.

[223] Steiglitz, K. A technique for the identication of linear systems / K. Steiglitz, L. E. McBride // IEEE Trans, Automatic Control. – 1965. – Vol. AC-10. – P. 461–464.

[224] Tse, E. On the identifiability of parameters / E. Tse, J. Anton // IEEE Trans. on Automat. Contr. – 1972. – Vol. 17, № 5. – P. 637–646.

[225] Tischle, M. B. Aicraft and Rotorcraft System Identtification: Engineering Methods with Flight Test Examples / M. B. Tischle, R. K. Remple // American Institute of Aeronoutics and Astronautics. Reston, 2006.

[226] Vajda, S. Identifiability of 1-st order reaction systems / S. Vajda // React. Kinet. Catal. Lett. – 1979. – Vol. 11, № 1. – P. 39–43.

[227] Vajda, S. Comments on structural identifiability in linear time-invariant systems / S. Vajda // IEEE Trans. on Automat. Contr. – 1979. – Vol. AC-24, № 3. – P. 495–496.

[228] Vajda, S. Further comments on parameter and structural identifiability: nonunique observability/reconstructibility for identifiable systems, other ambiguities, and new definitions / S. Vajda // IEEE Trans. on Automat. Contr. – 1982. – Vol. 27, № 5. – P. 1136–1137.

[229] Yu, W. Identification for parabolic distributed parameter systems with constraints on the parameters and the state / W. Yu // SIAM J. Control and Optim. – 1995. – Vol. 33, № 6. – P. 1801–1815.

Научное издание

Бойков Илья Владимирович,
Кривулин Николай Петрович

Аналитические и численные методы идентификации динамических систем

Редактор *А. Г. Темникова*
Технический редактор *А. Г. Темникова*
Компьютерная верстка *Д. В. Тарасов*

Подписано в печать 26.07.2016. Формат 60×841/16.
Усл. печ. л. 23,13.
Заказ № 391. Тираж 500.

Пенза, Красная, 40, Издательство ПГУ
Тел./факс: (8412) 56-47-33; e-mail: iic@pnzgu.ru